Vorlesung 5 | 10.11.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen:

- Maßeindeutigkeit und Erweiterung von Maße, Lebesgue-Maß, Zahlmaß.

1 Integration

Nächste Ziel. Wir wollen Funktionen gegen Masse integrieren und Erwartungwerte von Zufallsvariablen berechnen.

Endlich Situation. Sei Ω endlich und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung so dass $f(\omega)$ die Auszahlung in einem Spiel ist, falls das Ergebnis ω ist. Dann ist die erwartete Auszahlung pro Spiel durch die Summe

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mathbb{P} := \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

gegeben.

$f(\Omega)$ (Bild von Ω durch f) ist auch eine endliche Menge, dann $f(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}$. Offensichtlich können wir auch schreiben:

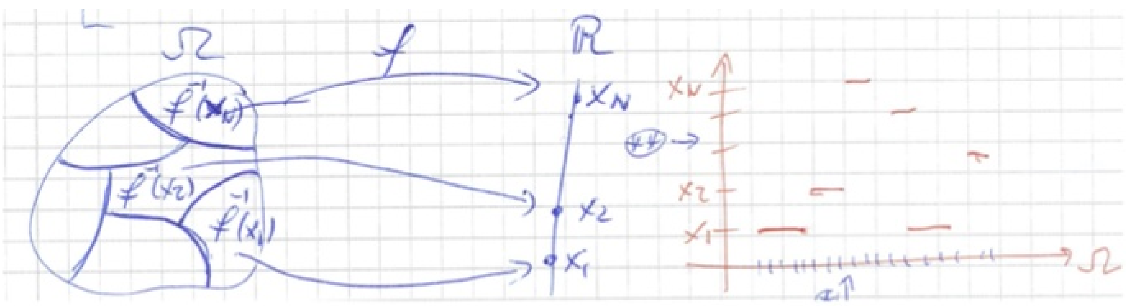
$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\omega \in \Omega : f(\omega) = x_k} f(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \underset{\text{Add.}}{=} \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x_k\}).$$

Einwenig allgemeiner kann mann das Integrale $\int f \mathrm{d}\mathbb{P}$ so definieren.

Definition 1. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-raum und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nur N verschiedene Werte $x_1, \ldots, x_N$ annimt. Dann ist*

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mathbb{P} := \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x_k\})$$

genau dann definiert wenn $f^{-1}(x_k) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = x_k\} \in \mathscr{F}$ für alle $k = 1, \ldots, N$.



Bemerkung. $\{f^{-1}(x_k) : k = 1, \ldots, N\}$ ist eine Partition von Ω.

Definition 2. *Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Messraum, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f messbar bzgl. $\mathscr{F}$, genau dann wenn*

$$\{f \leqslant x\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leqslant x\} = f^{-1}((-\infty, x]) \in \mathscr{F}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Eine reellwertige messbare Funktion auf $(\Omega, \mathscr{F})$ *heißt eine* *Zufallsvariable* *auf* $(\Omega, \mathscr{F})$.

Problem von Def. 1: die Summe von der Funktion f abhängig ist $\Rightarrow$ unpraktisch $\Rightarrow$ eine Allgemeiner Formel ist gesucht!

D.h.: wir suchen eine Definition des Integral, die nicht von der specifichen Form der Funktion f abhängt. Z.B. wir wollen nicht annehmen, dass es nur endlich viele Werte annimmt.

Bemerkung. *Grundlegende Eigenschaften des Integrals.* Sei $I: \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung von die Linearraüm $\mathscr{E}$ der Funktionen $f: \Omega \to \mathbb{R}$ mit endlich viele Werte mit Eigenschaften:

- Linearität: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathscr{E}$,

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

- Positivität: Falls $f \geqslant 0$, dann $I(f) \geqslant 0$.
- Stetigkeit: Falls $f_n \searrow 0$ dann $I(f_n) \searrow 0$. (Kovergenz von oben)

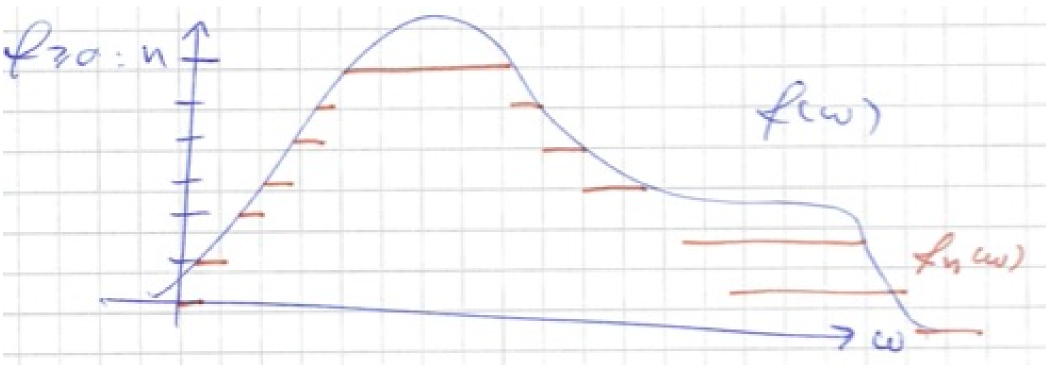
I heißt ein *Daniell Integral*. Offensichtlich ist $f \mapsto \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ ein Daniell Integral. (Übung).

Für allgemeine Funktionen wird man so machen.

a) $f \geqslant 0$: Approximation mit monotone Folgen $(f_n)_n \Rightarrow f_n \uparrow f$ [steigende Funktionsfolge, Konvergenz von unten]

$$\int f \mathrm{d}\mathbb{P} := \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mathbb{P} = \sup_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mathbb{P}$$

(das folgt wegen Positivität)



b) In positive und negative Teile zerlegen. $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm \geqslant 0$. Falls $\int f_\pm \mathrm{d}\mathbb{P}$ wohldefiniert sind dann

$$\int f \mathrm{d}\mathbb{P} := \int f_+ \mathrm{d}\mathbb{P} - \int f_- \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

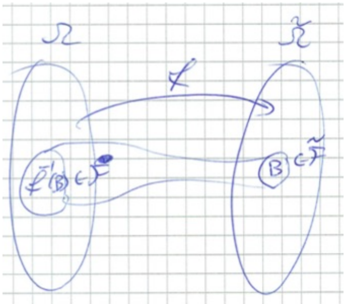
1.1 Messbarkeit

Allgemeine Definition einer Messbare Abbildung.

Definition 3. *Seien* $(\Omega, \mathscr{F})$ *und* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$ *zwei Messräume und* $f: \Omega \to \tilde{\Omega}$ *eine Funktion. Dann heißt f messbar von* $(\Omega, \mathscr{F})$ *nach* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$ *genau dann, wenn* $\forall B \in \tilde{\mathscr{F}}$,

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}.$$

Auch nennen $(\mathscr{F}, \tilde{\mathscr{F}})$*-messbar, ode auch* $\mathscr{F}$*-messbar.*



Beispiel. Sei Ω ein diskreten Raum und $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Dann ist jede Abbildung $f\colon \Omega \to \Omega'$ messbar.

Wie kann man diese Eigenschaft überprufen?

Lemma 4. *Sei* $\mathscr{F}$ *eine* σ*-Algebra und* $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$*. Dann ist das Mengensystem*

$$\mathscr{A} := \{A \subset \tilde{\Omega} \mid f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\}$$

eine σ*-Algebra.*

Beweis. (a) $f^{-1}(\tilde{\Omega}) = \Omega \in \mathscr{F} \Rightarrow \tilde{\Omega} \in \mathscr{A}$.
(b) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathscr{F} \Rightarrow \emptyset \in \mathscr{A}$.
(c) Sei $A \in \mathscr{A} \Rightarrow f^{-1}(A^c) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \notin A\} = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in A\}^c = (f^{-1}(A))^c \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$
(d) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A} \Rightarrow$

$$f^{-1}(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in \cup_{n\geqslant 1} A_n\} = \cup_{n\geqslant 1} \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A_n\}}_{\in \mathscr{F}} \in \mathscr{F}$$

Dann erhalten wir $\cup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathscr{A}$. □

Folgerung 5. *Falls* $\mathscr{C}$ *ein Mengensystem ist, s.d.* $\sigma(\mathscr{C}) = \tilde{\mathscr{F}}$*. Dann f ist messbar wenn* $f^{-1}(C) \in \mathscr{F}$*,* $\forall C \in \mathscr{C}$*.*

Beweis. Sei $\mathscr{A} = \{A \in \tilde{\Omega} \mid f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\}$. $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra wegen Lemma 4. Aber $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A} \Rightarrow \sigma(\mathscr{C}) = \tilde{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{A}$, d.h. $\forall A \in \tilde{\mathscr{F}}, f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$. □

Folgerung 6. *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann ist f messbar als Funktion von* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *nach* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

(*Erinnerung:* das Urbild von offenen Mengen unter stetigen Abbildungen ist eine offene Menge.)

Beweis. Da $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ durch offene Mengen erzeugt wird (per Def.) und f^{-1}(offene Menge) ist eine offene Menge aufgrund der Stetigkeit von f, dann die Behauptung folgt aus Folgerung 5. □

Definition 7. *Sei* $f\colon \Omega \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$ *eine Funktion. Die von f erzeugter* σ*-Algebra, bezeichnet mit* $\sigma(f)$*, ist die kleinste* σ*-Algebra* $\mathscr{A}$ *von* Ω *dass* $f\colon (\Omega, \mathscr{A}) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$ *messbar machen (auch* $\mathscr{A}$*-messbar gennant). Es gilt*

$$\mathscr{A} = \sigma(f) = \{f^{-1}(A) : A \in \tilde{\mathscr{F}}\}.$$

Beweis. Sei $\mathscr{B}$ eine σ-Algebra, dass f $\mathscr{B}$-messbar machen. Dann für alle $A \in \tilde{\mathscr{F}}$ gilt $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}$. Aber $f^{-1}(A) \in \mathscr{A}$. Dann $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ und es folgt dass $\mathscr{A} = \cap_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}'$, wo die Durchschnitt für alle σ-Algebren ist, dass die f messbar machen. □

Beispiel. Sei $\Omega = [0,1]$ und $\mathscr{F} = \sigma(\{[0,1/2],(1/2,1]\})$ dann die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$

$$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \in [0,1/4) \\ 3 & \omega \in [1/4,1] \end{cases}$$

nichts $\mathscr{F}$-messbar ist. Und $\sigma(f) = \sigma(\{[0,1/4],(1/4,1]\}) \neq \mathscr{F}$.

1.2 Definition des Integrals

In diesen Abschnitt werden wir die obige Diskussion präzisieren. Wir definieren (konstruieren) eines allgemeines Integral und auch beweisen wichtige Sätze, die uns Limes und Integral vertauschen lässen.

Wir werden nur die obigen drei Eigenschaften des Integrals verwenden (Lin, Pos, Ste).

Wie oben vorgeschlagen, zuerst fangen wir mit einfache Funktionen an.

Definition 8. *(Einfache Funktionen) Eine messbare Funktion $g\colon (\Omega,\mathscr{F}) \to \mathbb{R}$ heißt einfach, falls nur endliche viele Werte annimt , d.h. $\sharp f(\Omega) < \infty$. Dann $\exists x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ s.d. $x_i \neq x_j$ falls $i \neq j$,*

$$A_k = f^{-1}(x_k) = \{\omega \in \mathscr{F} \mid g(\omega) = x_k\} \in \mathscr{F}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ falls } i \neq j, \quad \cup_{k=1}^N A_k = \Omega,$$

und schreiben wir

$$g(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

Bezeichnen wir

$$\mathscr{E} := \{\text{Menge einfacher Funktionen}\}$$

$$\mathscr{E}_+ := \{\text{Menge positiver } (\geqslant 0) \text{ einfacher Funktionen}\} \subseteq \mathscr{E}$$

Definition 9. *Sei $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ ein Maßraum (nicht notwending ein W-raum) und*

$$g(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

eine beliebige einfache Funktion. Dann setzen wir

$$\int_\Omega g \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^n x_k \mu(A_k).$$

der Integral von g gegen μ aus Ω. Wenn $\mu = \mathbb{P}$ ist ein W-Maß ist, dann bezeichen wir auch

$$\mathbb{E}(g) := \int_\Omega g \mathrm{d}\mathbb{P}$$

die Erwartungswert von g bzg. $\mathbb{P}$.

Bemerkung. Wir bezeichnen das Integral auch als

$$\int_\Omega g \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g(\omega) \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega g(\omega)\, \mu(\mathrm{d}\omega),$$

um die Abhängigkeit von der Integrationsvariablen $\omega \in \Omega$ anzuzeigen.

Definition 10. *(Integral) Sei $f \geqslant 0$ messbar. Dann*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu := \sup_{g \leqslant f : g \in \mathscr{E}_+} \int g \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}.$$

Für allgemeine Funktionen, können wir schreiben

$$f(\omega) = \underbrace{\mathbb{1}_{f(\omega) \geqslant 0} f(\omega)}_{=: f_+(\omega)} + \underbrace{\mathbb{1}_{f(\omega) < 0} f(\omega)}_{=: -f_-(\omega)}.$$

D.h. die Zerlegung von f in positive und negative Teile betrachten.

Definition 11.

- *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar mit $\int_\Omega f_+ \mathrm{d}\mu < +\infty$ oder $\int_\Omega f_- \mathrm{d}\mu < +\infty$. Dann*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f_+ \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_- \mathrm{d}\mu.$$

- *Eine (messbar) Funktion f heißt integrierbar falls*

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_+ \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_- \mathrm{d}\mu < \infty.$$

  (weil $|f(\omega)| = f_+(\omega) + f_-(\omega)$).

- *$L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu) \equiv$ Raum integrierbare Funktionen (ein Vektorraum).*

Bemerkung. Sei $p \geqslant 1$. Wir können definieren die Raum der L^p-integrierbare Funktionen als

$$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ messbar und } \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

Beispiel.

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ is nicht Lebesgue integrierbar auf $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = [0, \infty)$, d.h. integrierbar bzg. das Lebesguemaß $\mathrm{d}x$ auf der Messraum $(\mathbb{R}_{\geqslant 0}, \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geqslant 0}))$.

  Warum? Idea: finden ein positive einfache Funktion h s.d.

$$0 \leqslant h(x) \leqslant \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$$

  und auch $\int_{[0,\infty)} h(x) \mathrm{d}x = +\infty$. Wir haben

$$\sum_n \frac{1}{n} = +\infty.$$

- $g(x) = 1/x$ is nicht Lebesgue integrierbar auf $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = [0, 1]$.

Fragen:

- Linearität des Integrals?

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}\mu$$

- Können wir der Integral und Grenzwert vertauschen?

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \stackrel{?}{=} \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu$$

<u>Wichtige Sätze</u>:

1. Satz der monotone Konvergenz
2. Fatou'sche Lemma
3. Satz der dominierte Konvergenz

Satz 12. *(Monotone Konvergenz)*

- *Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *ein Massraum,* $f \geqslant 0$ *messbar.*
- *Sei* $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ *s.d. (f_n messbar)*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega \qquad \textit{(punktweises Limes)}$$

Dann

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. (a) $f_n \leqslant f$ dann

$$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{g \leqslant f_n : g \in \mathscr{E}_+} \int g \mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{g \leqslant f : g \in \mathscr{E}_+} \int g \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu$$

Aus

$$\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f \mathrm{d}\mu, \forall n \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$

(b) Nahme ein beliebiges $h = \sum_{k=1}^m h_k \mathbb{1}_{A_k} \in \mathscr{E}_+$ s.d. $h \leqslant f$ und ein beliebiges $0 < a < 1$.
Z.z.

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geqslant a \int_\Omega h \mathrm{d}\mu.$$

Sei $E_n = \{\omega \in \Omega \,|\, a \cdot h(\omega) \leqslant f_n(\omega)\}$. Da $a < 1$ und $f_n \uparrow f$, $E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$ und $\cup_{n\geqslant 1} E_n = \Omega$. Wir haben $E_n \nearrow \Omega$.
Sei $\tilde{h}_n(\omega) := a h(\omega) \mathbb{1}_{E_n}(\omega)$, dann $\tilde{h}_n \leqslant f_n$.

$$\Rightarrow \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{g \leqslant f_n, g \in \mathscr{E}_+} \int_\Omega g \mathrm{d}\mu \geqslant \sup_{g \leqslant \tilde{h}_n, g \in \mathscr{E}_+} \int_\Omega g \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \tilde{h}_n \mathrm{d}\mu = a \sum_{k=1}^m h_k \mu(A_k \cap E_n)$$

Aber $A_k \cap E_n \nearrow A_k$ als $n \to \infty$ (weil $E_n \nearrow \Omega$) $\Rightarrow$ $\mu(A_k \cap E_n) \to \mu(A_k)$ als $n \to \infty$ wegen die stetigkeit von die Maß μ (oder die σ-Additivität). Dann, als $n \to \infty$ wir haben

$$a \sum_{k=1}^m h_k \mu(A_k \cap E_n) \to a \sum_{k=1}^m h_k \mu(A_k) = a \int_\Omega h \mathrm{d}\mu.$$

Deshalbs,

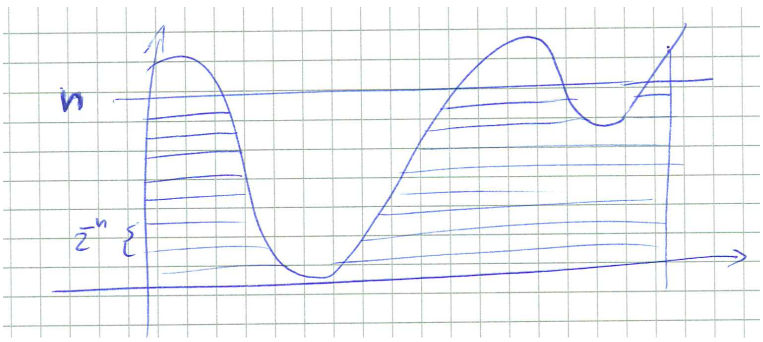
$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geqslant a\int_\Omega h\mathrm{d}\mu, \qquad \forall a<1, h\in\mathscr{E}_+ \text{ mit } h\leqslant f.$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \underbrace{\sup_{a<1} a}_{=1}\cdot \underbrace{\sup_{h\leqslant f, h\in\mathscr{E}_+}\int_\Omega h\mathrm{d}\mu}_{\int_\Omega f\mathrm{d}\mu} = \int_\Omega f\mathrm{d}\mu.$$

□

Konsequenz: Wir Können eine explizite konstruction angeben für der Integral. Sei $f\geqslant 0$ und setze

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{\{\omega\in\Omega:2^{-n}k\leqslant f(\omega)<2^{-n}(k+1)\}} + n\mathbb{1}_{\{\omega\in\Omega:f(\omega)\geqslant n\}}.$$



Frage. Warum $k=0,\ldots,n2^n-1$? Weil:

$$k=n2^n-1 \Rightarrow [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)) = [n-2^{-n}, n)$$

Das ist

$$\cup_{k=0,\ldots,n2^n-1}[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)) = [0,n)$$

aber z.B.

$$\cup_{k=0,\ldots,2^n-1}[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)) = [0,1)$$

nicht gut.

Wir haben $f_n\leqslant f$ und $f_n\leqslant f_{n+1}$ (Denke!)

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\left[n\,\mu(f\geqslant n) + \sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mu\left(\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\right)\right].$$

Bemerkung.

a) Es ist nicht schwerig zu sehen, das das Integral eine linear Operationen ist: $\forall f,g\in L^1(\Omega, \mathscr{F},\mu)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\mu = \alpha\int_\Omega f\mathrm{d}\mu + \beta\int_\Omega g\mathrm{d}\mu.$$

(Übung, siehe Boviers Skript)

b) Wieso ist Riemann-Integrale nicht immer gut? (Riemann Integral ist über Treppenfunktionen angenähert und sie erlauben in Allgemein keine gute Annäherung)

- Sei $\Omega = [0,1]$, $f\colon \Omega \to [0,1]$

$$\omega \mapsto f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } \omega \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

  Sei $g = 1 - f$. Die einzige Treppenfunktion unter f ist 0 (das gleich für g) $\Rightarrow$ (Unten)-Riemann Integral von f oder g =0 aber $f + g = 1$ and Riemann Integral von $1 = 1$. $\Rightarrow$ Linearität ist ein Problem.

- Für Lebsegue Integral $\int_{[0,1]} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0$ und $\int_{[0,1]} g(\omega)\mathrm{d}\omega = 1$.
