Vorlesung 7 | 17.11.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen:

- Wichtige Sätze über das Integral: Monotone, Dominierte Konvegenz, Fatou'sche Lemma; Abbildung von Maße, Verteilung von eine Z.V.; Verteilungfunktion.

2.1 Beispiele von Zufallsvariablen

a) Diskrete Verteilungen

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit Ω diskret (d.h. abzählbar), $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ und μ Zahlmaß, d.h. $\mu(\{\omega\}) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$.

Fur $f: \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar bzg. μ wir bezeichnen

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \mu(\mathrm{d}\omega).$$

Sei $\rho: \Omega \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ s.d.

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1.$$

Dann

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} \rho(\omega)$$

ist eine W-maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$, s.d. $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \rho(\omega)$. Alle W-maße auf $(\Omega, \mathscr{F})$ haben diese Form. Wir nennen ρ die (diskrete) *dichte* von $\mathbb{P}$ bezuglich μ.

Im folgenden sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Wir geben einige Beispiele für Zufallsvariablen.

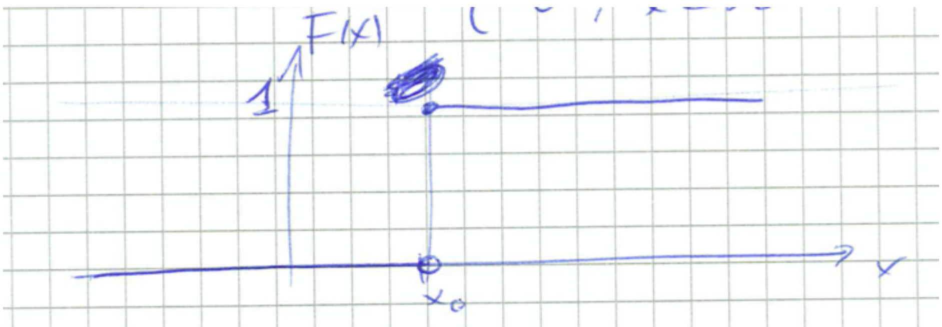
2.1.1 Dirac-Mass: δ_x

Das Dirac-Mass δ_x an $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion von δ_{x_0} ist

$$F(x) = \delta_x(\{y \in \mathbb{R}: y \leqslant x\}) = \begin{cases} 1, & x \geqslant x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

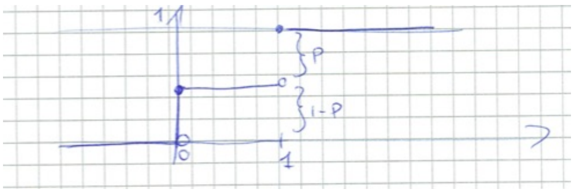


2.1.2 Bernoulli Verteilung: Ber(p)

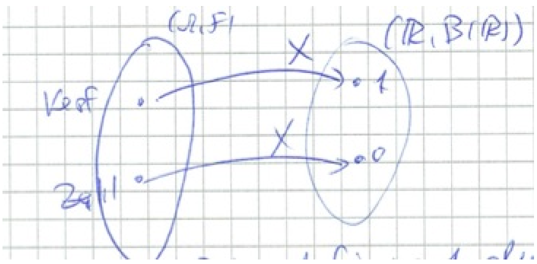
Die Bernoulli Verteilung mit Parameter $p \in [0,1]$, $\mathrm{Ber}(p)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Ber}(p) = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$

Die Verteilungsfunktion ist (monotone wachsend, rechtsstetige)



Beispiel. Münzwurf mit $\mathbb{P}(\text{Kopf}) = p$ und $\mathbb{P}(\text{Zahl}) = 1-p$. $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$



Sei X die Z.V. definiert durch

$$\begin{cases} X(\text{Kopf}) = 1 \\ X(\text{Zahl}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathrm{Ber}(p)$$

oder, wir bezeichnen $X \sim \mathrm{Ber}(p)$: „X Verteilt as $\mathrm{Ber}(p)$".

2.1.3 Binomialverteilung: Bin(n, p)

Wir betrachten einen n-maligen Münzwurf. Ergebnisraum $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}^n$. Sei

$$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) = \text{„\#Kopf in } \omega\text{“} \in \mathbb{N}.$$

Dann $X(\omega) \in \{0, \dots, n\}$. Falls die n Münzen „unabhängig" gewurfen sind (später besser zu definieren!) $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n$$

Hier:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \underbrace{\boxed{\circ\circ\circ\circ\circ\cdots\circ\circ\circ\circ}}_{\longleftarrow\, k \,\longrightarrow}\underbrace{\boxed{\bullet\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet\bullet}}_{\longleftarrow\, n-k \,\longrightarrow}$$

Und

$$B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

is die $\mathrm{Bin}(n,p)$ Verteilung (aus $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$). Wir schreiben $X \sim \mathrm{Bin}(n,p) = \mathbb{P}_X$.

Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X? Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, dann

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = np.$$

2.1.4 Poisson Verteilung: Poi(λ)

Sei $\lambda > 0$. Betrachten wir viele Münzwürfe ($n \to \infty$) mit sehr geringer Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \lambda / n \to 0$. Nehme die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, \lambda / n)$ für $n > \lambda$ (klar!)

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \qquad B_{n,\lambda/n}(k) = \underbrace{\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]}_{\to 1} \frac{1}{k!_{\to}} \frac{\lambda^k}{n^k} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{\to e^{-\lambda}} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{als } n \to \infty.$$

Die Poisson Verteilung mit parameter λ, $\mathrm{Poi}(\lambda)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Poi}(\lambda) := \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta_k$$

Übung: Erwartungswert von N? Sei $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, dann

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} k = \lambda$$

Bemerkung.

- Es kommt vor z.B. beim Nuklearzerfall. In Situationen, in denen wir seltene zufällige Ereignisse zählen, die mit konstanten Raten λ (z.B. Ereignisse pro Sekunde) auftreten.
- Hier haben wir ein Grenzwert einer W-Maß. In welche Sinn ist die Kovergenz? (Antwort: Siehe später...).

2.1.5 Geometrische Verteilung: Geo(q)

Sei $q \in [0, 1)$. Dann ist die Geometrische Verteilung mit Parameter q durch

$$\mathrm{Geo}(q) := \sum_{n \geqslant 0} (1-q) q^n \delta_n$$

gegeben.

Beispiel. Kommt vor beim wiederholten Münzwurf: $\Omega = \{\text{Zahl}, \text{Kopf}\}^\infty$ (justify).

$$X : \Omega \to \mathbb{N}, \quad \omega \mapsto X(\omega) = \text{„ersten Zahl s.d. Münzwurf ergibt Zahl."}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-q) q^{k-1}, \qquad k \geqslant 1.$$

mit $q = 1/2$ falls dir Münz fair ist.

b) Absolut stetige Verteilungen (bzg. Leb)

Definition 1. *Sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine messbare positive Funktion mit*

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \mathrm{d}x = 1.$$

Dann, ist ein W-Maß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert durch

$$\mathbb{P}(A) := \int_A \rho(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) \rho(x) \mathrm{d}x, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Wir nennen $\mathbb{P}$ W-Maß mit dichte ρ bzg. Lebesgue. Die Verteilungsfunkion F von $\mathbb{P}$ ist

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(x) \mathrm{d}x.$$

Falls ρ stetig ist, dann F ist eine stetige differenzierbare Funktion und $F'(t) = \rho(t)$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{P}$ ein wohldefiniert W-Maß ist. Offenlich $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$ und $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Dann $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Für die σ-additivität wir bemerken das fur paarweise disjunk messbaren Mengen $(A_n)_n$:

$$\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\cup_n A_n}(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{A_n}(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{A_n}(x)\rho(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{A_n}(x)\rho(x)\right]\mathrm{d}x \qquad \text{(Monotone Konv.)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n}(x)\rho(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Linearität)}$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n}(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n).$$

□

Definition 2.

- *Eine Funtkion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, falls $\exists \rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel messbar und integrierbar bzg. Lebesgue, so dass*

$$F(t) - F(s) = \int_s^t \rho(x)\mathrm{d}x, \qquad s < t.$$

- *Eine Verteilung $\mathbb{P}$ (W-Maß auf $\mathbb{R}$) mit absolut stetig Verteilungfunkion F heißt auch ein absolut stetig Verteilung und ρ heißt die W-diche der W-Maß (oder Verteilung) $\mathbb{P}$ (Wichtig: ρ ist nich endeutig definiert)*

$$\mathbb{P}((s,t]) = \int_s^t \rho(x)\mathrm{d}x, \qquad s < t.$$

- *Eine Z.V. X heißt absolut stetig falls seine Verteilungs $\mathbb{P}_X$ absolut stetig ist*

$$\mathbb{P}(X \in (s,t]) = \mathbb{P}_X((s,t]) = \int_s^t \rho(x)\mathrm{d}x, \qquad s < t.$$

  und dann

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

  für alle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare und integrierbare blg. $\mathbb{P}_X$.

Bemerkung. Literatur findet man „Dirac Delta-Funktion“ δ so dass

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-z)\mathrm{d}x = f(z), \qquad z \in \mathbb{R}, f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

Das ist nicht möglich. δ ist keine Funktion! Wir können f im Punkt z ändern und das Integral sollte sich nicht ändern!

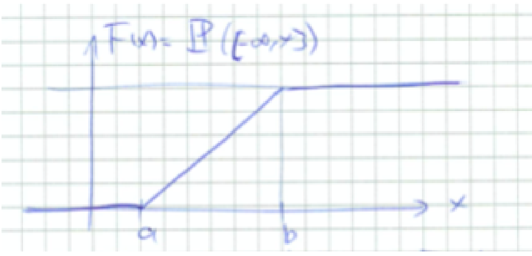
Also sollten wir wirklich stattdessen schreiben

$$\delta_x(\mathrm{d}y) \text{„=“} \delta(x-y)\mathrm{d}y.$$

2.1.6 Gleichverteilung

Sei $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Dann ist die Gleichverteilung auf I gegeben durch

$$\mathrm{d}\mathbb{P}(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{x\in[a,b]}\mathrm{d}x$$



Bemerkung. Die Ableitung F' existiert in die Menge $\mathbb{R}\setminus\{a,b\}$, d.h. *fast-überall* weil $\mathrm{Leb}(\{a,b\})=0$. $F$is absolut stetig mit dichte $\rho(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{x\in[a,b]}$.

2.1.7 Exponential Verteilung: Exp($\boldsymbol{\lambda}$)

Die Exponential Verteilung mit Parameter $\lambda>0$ hat W-dichte

$$\rho(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x>0}$$

Wichtig in Markov Ketten in stetiger Zeit (Vorlesung: Markov processes).

2.1.8 Gaussverteilung $\boldsymbol{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$

Sei $m\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$. Die Gaussverteilung $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ hat W-dichte

$$\rho(x)=\phi_{m,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\qquad x\in\mathbb{R}$$

Zentrales Object in dieser Vorlesung, als universelle Limes von Summe unabhängige Z.V. ist.
Übung: Rechnen $\mathbb{E}[X]$ mit $X\sim\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=?$$

(Antwort: $\mathbb{E}[X]=m$.)

2.1.9 Cauchy-Verteilung, Cauchy($\boldsymbol{a}$)

Die Cauchy-Verteilung mit parameter a hat Dichtefunktion

$$\rho(x)=\frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$$

Es ist ein Beispiel von Verteilungen, die kein Mittelwert besitzen. D.h. $\mathbb{E}[X]$ mit $X\sim\mathrm{Cauchy}(a)$ ist nich wohldefiniert weil $\mathbb{E}[|X|]=+\infty$, so $X:\Omega\to\mathbb{R}$ is nicht integrierbar.

$$\mathbb{E}[|X|]=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x=+\infty$$

Z.b. weil für $|x|>1$ es gibt

$$\frac{|x|}{1+x^2}\geqslant\frac{1}{2}\frac{|x|}{x^2}=\frac{1}{2|x|}$$

Und wir haben

$$\int_1^\infty\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant1}\int_n^{n+1}\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n\geqslant1}\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n}=+\infty.$$

Bemerkung.

- Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W-Raum , Z.V. $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, dann $\mathbb{P}_X$ ist die Verteilung von X gegen $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}_X$ is ein W-maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
- Alle W-maße μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ sind Verteilungenvon Z.V.: tatsächlich wir nehmen $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$ und $X(\omega) = \omega$, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann

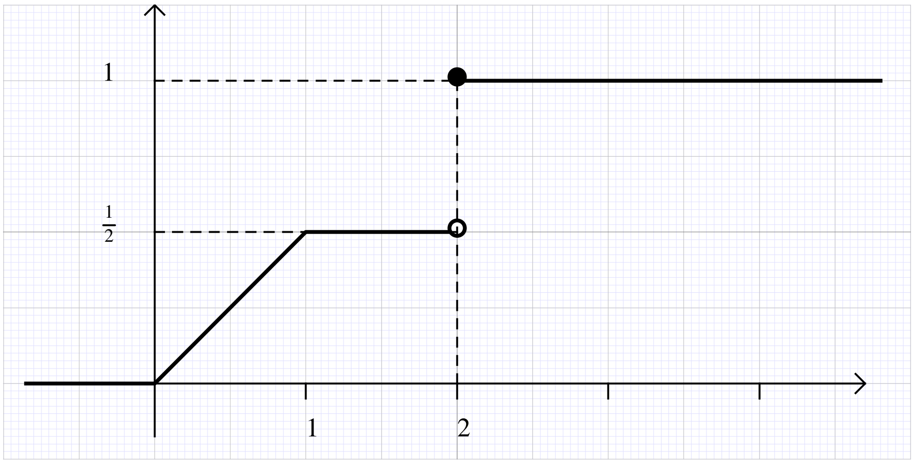
$$\mathbb{P}_X = \mu, \qquad \mu = \mathbb{P}$$

- Die Verterilungsfunktion von eine diskrete W-Maß ist stückweise konstant.
- Die Verterilungsfunktion von eine absolute stetig W-Maß ist stetig mit Abteilung fast-überall.
- Sie können convexe Kombination nehemen zu neue W-Maß construiren.

Beispiel. Nehemen μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$\mu(A) = \frac{1}{2}\delta_2(A) + \frac{1}{2}\int_A \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x$$

μ ist eine convexe Kombination von die Dirac maß auf 3 und die Gleichverteilung von die Intervall $[0,1]$. μ sind nich diskret oder absolut stetig. Verteilungfunkion F von μ:



3 Bedingte W-keiten, Unabhängigkeit und Produktmaße

(Siehe Kapitel 3 in Bovier Skript)

Zentrales Thema der Stochastik ist die Abhängigkeit von Ereignissen oder von Teilexperimenten. Wir wollen die Abhängigkeit quantifizieren.

3.0.1 Bedingte W-keiten

Für $A, B \in \mathscr{F}$ zwei Ereignisse,

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$

Frage: Welche Einfluss hat die Information „A eintritt“ über des Ereignis B?

Wir suchen nach einem W-Maß $\mathbb{P}_A$, das die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter bestimmten Umständen beschreibt, die von einem anderen sogar Ereignis A beschrieben werden. (Beide die frequentisch oder die subjectiv Deutung sind möglich).

Solche W-Maß müss die folgende Eigenschaften haben:

a) $\mathbb{P}_A(A) = 1$, d.h. die Eregnis A ist bei $\mathbb{P}_A$ sicher.

b) Die neue Bewertung der Teileregnisse von A ist proportional zu iherer ursprünglichen Bewertung, d.h. es existiert eine Konstante $c_A > 0$ mit $\mathbb{P}_A(B) = c_A \mathbb{P}(B)$ für alle $B \in \mathscr{F}$ mit $B \subset A$.

Durch diese Eigenschaften ist $\mathbb{P}_A$ bereits eindeutig festgelegt, weil wir haben für alle $B \in \mathscr{F}$

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_A(B \cap A) + \underbrace{\mathbb{P}_A(B \cap A^c)}_{=0 \quad \text{wegen (a)}} = c_A \mathbb{P}(B \cap A)$$

Denn, wenn $B = A$ wir haben $1 = P_A(A) = c_A \mathbb{P}(A)$ d.h. $c_A = \mathbb{P}(A)^{-1}$. Wir schließen daraus

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Definition 3. *Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein W-raum,* $A, B \in \mathscr{F}$ *zwei Ereignisse. Für* B *s.d.* $\mathbb{P}(B) > 0$*, definieren wir*

$$\mathbb{P}(A \,|\, \mathrm{B}) = \mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

die bedingte W-keit von A gegeben B.

Bemerkung. Falls $\mathbb{P}$ sei die empirische Häufigkeit eines Ereignisses in einem Experiment n-mal wiederholt, s.d.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \in A} = \frac{\sharp\{k \in \{1, \ldots, n\} : x_k \in A\}}{n}$$

wo $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$ sind die Ergebnisse jedes Widerholung. Dann ist

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \in A \cap B}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \in B}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \in A \cap B}}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{x_k \in B}} = \frac{\sharp\{k \in \{1, \ldots, n\} : x_k \in A \cap B\}}{\sharp\{k \in \{1, \ldots, n\} : x_k \in A\}}$$

die Häufigkeit des Ereignisses B unter allen Experimenten, in denen A eintrat.

Einige Eigenschaften.

Satz 4. *Sei* $B \in \mathscr{F}$ *mit* $\mathbb{P}(B) > 0$*. Dann*

a) Die bedingte W-keit $\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|B)$ *definiert ein W-maß auf* $(B, \mathscr{F}_B)$*, wobei*

$$\mathscr{F}_B = \mathscr{F} \cap B := \{A \cap B \,|\, A \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathscr{F}.$$

b) Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge von paarweise disjunkt Mengen in* $\mathscr{F}$*, s.d.*

1. $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Omega$

2. $\mathbb{P}(B_n) > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Dann, $\forall A \in \mathscr{F}$*,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n).$$

Beweis. *Teil a)* Z.z. $\mathscr{F}_B$ ist eine σ-Algebra von B: $B, \emptyset \in \mathscr{F}_B$,

$$A \in \mathscr{F}_B \Rightarrow A = A' \cap B, A' \in \mathscr{F} \Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c = B \cap ((A')^c \cup B^c) = B \cap (A')^c \in \mathscr{F}_B.$$

$$(A_n)_n \subseteq \mathscr{F}_B \Rightarrow \cup_n A_n = \cup_n \big(\underbrace{A_n'}_{\in \mathscr{F}} \cap B\big) = \big(\underbrace{\cup_n A_n'}_{\in \mathscr{F}}\big) \cap B \in \mathscr{F}_B.$$

Is $\mathbb{P}_B$ ein W-Maß auf $(B, \mathscr{F}_B)$? $\mathbb{P}_B(B) = 1$, $\mathbb{P}_B(\emptyset) = 0$,

$$\mathbb{P}_B(B \setminus A) = \frac{\mathbb{P}((B \setminus A) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \setminus A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \mathbb{P}_B(A).$$

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ eine Folge paarwise disjunkte Teilmengen von B, dann $(A_n \cap B)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}_{\mathbb{B}}$ auch paarwise disjunkte sind und

$$\mathbb{P}_B(\cup_n A_n) = \frac{\mathbb{P}((\cup_n A_n) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\cup_n (A_n \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\underset{\sigma-\text{Add. von } \mathbb{P}}{\underbrace{=}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_B(A_n).$$

Gut, wir haben alle Eigenschaften gezeigt. Es sei W-Maß.

Teil b)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A \cap B_n) \underset{\sigma-\text{add}}{=} \mathbb{P}(\cup_n (A \cap B_n)) = \mathbb{P}(A \cap (\cup_n B_n)) = \mathbb{P}(A).$$

□
