Vorlesung 9 | 22.11.2020 | 10:15–12:00 via Zoom

Ein Handzettel für heutige Vorlesung finden Sie auf der Seite der Vorlesung auf meiner Website, siehe Tagebuch.

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Bedingte W-keit $\mathbb{P}_B$ und überschrankung von σ-Algebren $\mathscr{F}_B$, Bayes'sche Formel, $\sigma(X)$: von Z.V. erzeugten σ-Algebren, Unabhängigkeit von Ereignisse, von σ-Algebren, von $Z.V.$, Produkt σ-Algebra $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$.

3 Bedingte W-keiten, Unabhängigkeit und Produktmaße (fortsetzung)

(Kapitel 3 in Bovier Skript)

3.1 Produkträume

Wir wollen schauen wie man unabhängige Z.V. konstruiren kann.

Seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mathbb{P}_2)$ zwei W-raume, und $X_1\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $X_2\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen. (d.h. Z.V.)

Ziel: Konstruiere $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und $\hat{X}_1\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $\hat{X}_2\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Z.V. auf $(\Omega, \mathscr{F})$, s.d. diese Z.V. unabhängig sind bzg. $\mathbb{P}$ und s.d. $\hat{X}_i$ und X_i gleich verteilt sind für $i = 1, 2$. Anders gesagt

$$\boxed{\mathbb{P}(\hat{X}_1 \in A, \hat{X}_2 \in B) = \mathbb{P}_1(X_1 \in A)\mathbb{P}_2(X_2 \in B), \qquad A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).}$$

Definition 1.

- $$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$$

  heißt das Produktraum von Ω_1 und Ω_2.

- $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ *ist die kleinste σ-Algebra, die alle Menge der Form (Rechtecke)*

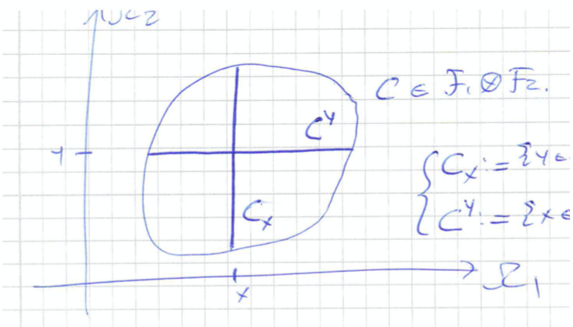
  $$C = A \times B = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in A, \omega_2 \in B\} \subseteq \Omega$$

  $A \in \mathscr{F}_1$, $B \in \mathscr{F}_2$ enthält, d.h.

  $$\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 = \sigma(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2), \qquad \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 = \{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\} \subseteq \mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

  $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ heißt die Produkt σ-Algebra von $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$.

Bemerkung. $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 = \{C = A \times B\}$ ist durchschnittstabil.



Falls $C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dann $C_x \subseteq \Omega_2$, $C^y \subseteq \Omega_1$, $f_x\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $f^y\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$,

$$C_x := \{y \in \Omega_2 | (x,y) \in C\}, \qquad x \in \Omega_1, \qquad\qquad C^y := \{x \in \Omega_1 | (x,y) \in C\}, \qquad y \in \Omega_2.$$
$$f_x(y) := f(x,y), \qquad x \in \Omega_1 \qquad\qquad f^y(x) := f(x,y), \qquad y \in \Omega_2$$

Lemma 2. *Es gilt*

a) $\forall C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ *dann,* $C_x \in \mathscr{F}_2$, $C^y \in \mathscr{F}_1$

b) $\forall f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *messbar dann,* $\forall x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$ $f_x\colon (\Omega_2, \mathscr{F}_2) \to \mathbb{R}$, $f^y\colon (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to \mathbb{R}$ *messbar sind.*

Satz 3. *Seien* $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ *W-maße auf* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$

a) $\exists!$ $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$ *W-maß (Produktmaß) auf* $(\Omega, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$ *s.d.*

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B) \qquad \forall A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2.$$

b) *Falls* $C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$*, dann*

$$\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2(C) = \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2(C_x)\mathrm{d}\mathbb{P}_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{P}_1(C^y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y).$$

Beweis. Wegen Satz 8 aus Skript 4, die Eindeutigkeit (aus $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$) folgt weil $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ is $\cap$-stabil und $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ erzeugt $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$. Existenz von $\mathbb{P}$ mit Eigenshaft (a)? Für $C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ definiere

$$\mathbb{P}(C) := \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2(C_x)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x).$$

Ist es wolhdefiniert? $x \in \Omega_1 \mapsto \mathbb{P}_2(C_x)$ ist wohldefiniert weil $C_x \in \mathscr{F}_2$ (Lemma 2, (a)). Ist es $\mathscr{F}_1$-messbar? Sei

$$\mathscr{C} = \{C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 | \text{Die Abbildung}\, x \mapsto \mathbb{P}_2(C_x) \text{ ist } \mathscr{F}_1\text{-messbar}\} \subseteq \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2.$$

Z.z. $\mathscr{C} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$. Für $C = A \times B$,

$$\mathbb{P}_2(C_x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{P}_2(B)$$

dann $\mathscr{F}_1$-messbar. Es folgt dass $C \in \mathscr{C}$ und

$$\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{C} \subseteq \sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2.$$

$\mathscr{C}$ ist Dynkin? (i) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathscr{C}$; (ii) $(C^c)_x = (C_x)^c \Rightarrow \mathbb{P}_2((C_x)^c) = 1 - \mathbb{P}_2(C_x) \Rightarrow C^c \in \mathscr{C}$ falls $C \in \mathscr{C}$. (iii) Fur $(C_k)_k \subseteq \mathscr{C}$ disjuntkte $(\cup_k C_k)_x = \cup_k (C_k)_x$ auch diskunkte, σ-Additivität $\Rightarrow$

$$x \mapsto \mathbb{P}_2[(\cup_k C_k)_x] = \sum_k \mathbb{P}_2((C_k)_x) \text{ und das ist messbar} \Rightarrow \cup_k C_k \in \mathscr{C}.$$

Dann $\mathscr{C}$ eine Dynkin-systeme ist und $\mathscr{D}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$. Aus Satz 5, Skript 4 (oder Lemma 3, Skript 3) $\Rightarrow$

$$\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 \supseteq \mathscr{C} \supseteq \mathscr{D}(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2) = \sigma(\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2) = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2.$$

(Alle durchschnittstabile Dynkin-systeme sind σ-Algebren). Dann $x \mapsto \mathbb{P}_2(C_x)$ ist $\mathscr{F}_1$-messbar für alle $x \in \Omega_1$ und dann $\mathbb{P}(C)$ wohldefiniert ist.

Letzlich, für $C = A \times B$,

$$\mathbb{P}(A \times B) = \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2((A \times B)_x)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) = \mathbb{P}_2(B) \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) = \mathbb{P}_2(B)\mathbb{P}_1(A),$$

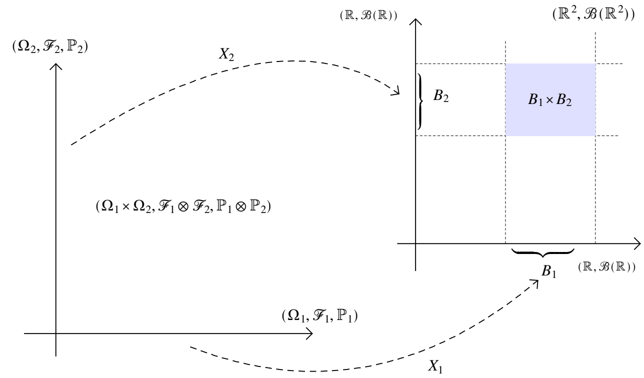
dann $\mathbb{P}$ erfüllt (a). σ-Additivität?

$$\mathbb{P}(\cup_k C_k) = \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2((\cup_k C_k)_x)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) \underset{\sigma\text{-Add für } \mathbb{P}_2}{=} \int_{\Omega_1} \left[\sum_k \mathbb{P}_2((C_k)_x)\right]\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x)$$

$$\underset{\text{Mon.Konv.}}{=\!=\!=} \sum_k \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2((C_k)_x)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) = \sum_k \mathbb{P}(C_k).$$

Es gilt. Normierung? $\mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(\Omega_1)\mathbb{P}_2(\Omega_2) = 1$. (Dann Complement gilt auch). □

Bemerkung. Falls X_k Z.V. auf $(\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathbb{P}_k)$ für $k = 1, 2$, dann sind X_1 und X_2 unabhängige Z.V. auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$



Es gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$ (übung). Wegen die Konstruktion oben:

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = \mathbb{P}_1(X_1 \in B_1)\mathbb{P}_2(X_2 \in B_2)$$

aber

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in \Omega_2) = \mathbb{P}_1(X_1 \in B_1)\mathbb{P}_2(X_2 \in \Omega_2) = \mathbb{P}_1(X_1 \in B_1)$$

Und dann

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2).$$

X_1, X_2 unbahängig blg. $\mathbb{P}$ sind.

Beispiel.

1. Werfen wir n unabhängige Münzen. $\Omega_k = \{0, 1\}$, $k = 1, \ldots, n$, mit $\mathscr{F}_k = \mathscr{P}(\Omega_k)$,

   $$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \{0, 1\}^n.$$

   Sei $\mathbb{P}_k(\omega_k = 1) = 1 - \mathbb{P}_k(\omega_k = 0) = p$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ definiert via

   $$X_k(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_k, \qquad \Rightarrow X_k \underset{\mathbb{P}}{\sim} \mathrm{Ber}(p).$$

   Dann sind auf $(\Omega, \mathscr{F} = \mathscr{F}_1^{\otimes n} = \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{Ber}(p)^{\otimes n})$ unabhängige identische verteilte Z.V. (i.i.d. Z.V.)(auf English: independent and identically distributed)

2. Seien X_1 und X_2 zwei Z.V. unabhängige mit abs. stetige Verteilungen mit Dichten ρ_1 und ρ_2 (bzg. Lebesgue). Dann

   $$\mathbb{P}(X_1 \leqslant s_1, X_2 \leqslant s_2) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant s_1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant s_2) = \int_{-\infty}^{s_1} \rho_1(x_1)\mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{s_2} \rho_2(x_2)\mathrm{d}x_2.$$

Allgemein, falls für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wir haben

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) \in A) = \int_A \rho(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$$

dann spricht man von Dichtefunktion der Verteilung von $X = (X_1, X_2)$. $X: \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Zufallsvektor. Für unab. Z.V. X_1, X_2 wir haben

$$\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1)\, \rho_2(x_2).$$

Hier wir benutzen dass

$$\int_{-\infty}^{s_1} \rho_1(x_1) \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{s_2} \rho_2(x_2) \mathrm{d}x_2 = \int_{x_1 \leqslant s_1, x_2 \leqslant s_2} \rho(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Wir werden unten sehen, warum dies wahr ist (Satz von Fubini)...

Quiz/Biespiel. Alice schreibt zwei reelle Zahlen $X_0 \neq X_1$. Dann wirft eine faire Münze M (d.h. eine Bernoulli Z.V.) und

$$\begin{cases} \text{falls } M = 1, \text{ zeigt } X_1, \\ \text{falls } M = 0, \text{ zeigt } X_0. \end{cases}$$

Sei Y die gezeigte Zahl und X die verstekte Zahl.

Die Aufgabe von Bob ist zu erraten ob $X > Y$ oder ob $X < Y$. Alice bietet Bob eine Wette mit Quote 1:2 an. Soll Bob die Wette annehmen?

Antwort: Ja! Bob hat eine Strategie, um die richtige Antwort mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 1/2 zu erraten!

Die Strategie ist wie folgt: Bob wirft eine Z.V. Z mit Verteilung $\mathcal{N}(0, 100)$ und dann falls $Z > Y$ er wettet für $X > Y$ oder sonst er wettet für $Y > X$.

Wie formalisieren wir das? Ein erster W-räum $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ für der Spiel, mit Z.V.

$$(M: \Omega_1 \to \{0, 1\}) \sim \mathrm{Ber}(1/2)$$

so dass $M = 0$ wenn $Y = X_1, X = X_0$ und $M = 1$ wenn $Y = X_0, X = X_1$. Ein zweiter W-räum $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ für Bob. Sei

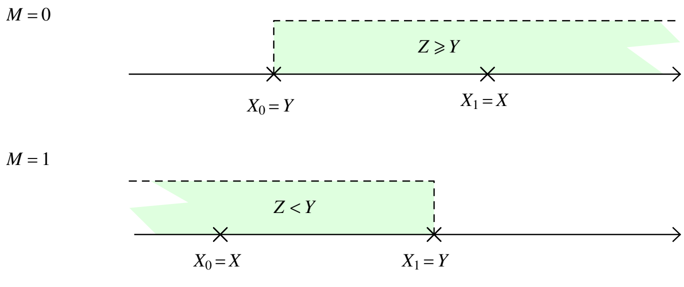
$$Z: \Omega_2 \to \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, 100),$$

und definiere die ganze W-räum als Produktraum:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2).$$

Falls

$$\begin{cases} Z < Y \;\Rightarrow\; \text{Bob rät } X < Y \\ Z \geqslant Y \;\Rightarrow\; \text{Bob rät } X > Y \end{cases}$$



Sei $A := \mathbb{1}_{Z<Y}$. Für $M=0, A=0$, Bob rät $X>Y$, Richtig. Für $M=1, A=1$, Bob rät $X<Y$, Richtig. Dann

$$\mathbb{P}(\text{Bob rät richtig}) = \mathbb{P}(M=A) = \mathbb{P}(Z<Y, M=1) + \mathbb{P}(Z>Y, M=0)$$

$$= \mathbb{P}(Z<X_1, M=1) + \mathbb{P}(Z>X_0, M=0)$$

$$\underset{Z,M\text{ unab.}}{=} \mathbb{P}_1(M=1)\mathbb{P}_2(Z<X_1) + \mathbb{P}(M=0)\mathbb{P}(Z\geqslant X_0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}_2(X_0 \leqslant Z < X_1)}_{>0} > \frac{1}{2}. \qquad (!!!)$$

3.2 Der Satz von Fubini

Frage. Sei

$$X\colon (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

Gilt es immer:

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}(\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2) = \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(\omega_2)\Big)\mathrm{d}\mathbb{P}_1(\omega_1) \;???$$

$$= \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}\mathbb{P}_1(\omega_1)\Big)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(\omega_2) \qquad ????$$

Falls nein, unter welche Bedingungen gilt es?

Satz 4. *(Fubini–Tonelli) Seien $(\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathbb{P}_k)_{k=1,2}$ zwei W-räume, $f \geqslant 0$ eine reelle messbare Funkion auf $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2)$. Dann ist*

$$h\colon x\in\Omega_1 \mapsto h(x) := \int_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y), \qquad \mathscr{F}_2\text{-messbar}.$$

$$g\colon y\in\Omega_2 \mapsto g(y) := \int_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_1(x), \qquad \mathscr{F}_1\text{-messbar}.$$

Dazu,

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}(\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2) = \int_{\Omega_1} h\mathrm{d}\mathbb{P}_1 = \int_{\Omega_2} g\mathrm{d}\mathbb{P}_2. \tag{1}$$

Beweis.

① Indikatorfunktion: Für $C \in \mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2$ sei $f = \mathbb{1}_C$, wegen Definition von Produktmaß wir haben,

$$h(x) = \mathbb{P}_2(C_x), \qquad g(y) = \mathbb{P}_1(C^y),$$

sind $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ messbar und (1) gilt.

② Wegen linearität des Integrals es gilt für alle einfachen Funtionen.

③ Jede positive messbare Funktion ist ein monotone Limes einfacher Funktionen, dann wegen die Monotone konvergenz Satz, (1) gilt im Allgemeinen. □

Für allgemeine Funktionen müssen wir integrierbarkeit fordern.

Satz 5. *(Fubini–Lebesgue) Sei $f\colon (\Omega_1\times\Omega_2, \mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ absolut integrierbar bzgl. $\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2$. Dann*

a) $y \mapsto f(x,y)$ ist $L^1(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mathbb{P}_2)$ für $\mathbb{P}_1$-fast alle $x\in\Omega_1$, (und umgekehrt) *b)* $h(x) := \int_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y)$ *wohldefiniert bis auf* $\mathbb{P}_2$*-Nullmengen und* $h \in L^1(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mathbb{P}_1)$,

$g(y) := \int_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_1(x)$ *wohldefiniert bis auf* $\mathbb{P}_1$*-Nullmengen und* $g \in L^1(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mathbb{P}_2)$,

c)

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2) = \int_{\Omega_1} h\mathrm{d}\mathbb{P}_1 = \int_{\Omega_2} g\mathrm{d}\mathbb{P}_2.$$

Beweis. (a) Thm 4 (Fubini) mit $|f| \geqslant 0$ gilt

$$\int_{\Omega_1} \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\mathbb{P}_2(\mathrm{d}y)\right)}_{<\infty \text{ bis auf } \mathbb{P}_1\text{-Nullmenge}} \mathrm{d}\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) \underset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|\mathrm{d}(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Annahme}}}{<} \infty.$$

(b) Sei $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm \geqslant 0$. Es folgt via Linearität auch aus Thm 4. [Für die x (bzw. y) wo $h(x)$ (bzw. $g(y)$) nicht definiert ist, kann man ein beliebiges Wert setzen] Dann

$$\int_{\Omega_1} |h(x)|\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) \leqslant \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|\mathbb{P}_2(\mathrm{d}x)\right)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) < \infty$$

und h ist integrierbar bzgl. $\mathbb{P}_1$. Hier wir benutzen dass

$$h(x) = \underbrace{\int_{\Omega_2} f_+(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y)}_{h_+(x)} - \underbrace{\int_{\Omega_2} f_-(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y)}_{h_-(x)}$$

und dass

$$|h(x)| = \int_{\Omega_2} f_+(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y) + \int_{\Omega_2} f_-(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y).$$

(c) Zerlegung von $f = f_+ - f_-$ +Thm 4+linearität. □
