Widerholung | 5.2.2021 | 10:15–12:00 via Zoom

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

$\mathscr{F}$ σ-algebra von Ω: $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, $\emptyset \in \mathscr{F}$, $A \in \mathscr{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$. $(A_n) \subseteq \mathscr{F} \Rightarrow \cup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathscr{F}$.

$\mathbb{P}$ W-Maß von die Messraum $(\Omega, \mathscr{F})$: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ falls $(A_n)_n$ sind paarweise disjunk.

Für alle $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, ist $\sigma(\mathscr{E})$ die von der Mengensysteme $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra: die kleinste σ-algebra dass alle die Elementen von $\mathscr{E}$.

$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ Borel σ-Algebra: von alle offene Mengen oder alle Intervallen (offene oder geschlossen), erzeugte σ-Algebra. $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a,b), a < b)$.

Zufallsvariablen: $X: (\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \mathscr{E})$ messbare Abbildung zwischen zwei Messraum. Messbarkeit: $X^{-1}(A) \in \mathscr{F}$ für alle $A \in \mathscr{E}$. Reelle Z.V. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X: (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Verteilung $\mathbb{P}_X$ von eine (reelle) Z.V. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X$ ist die W-keit Maß von $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ s.d.

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(A), \qquad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Verteilungfunktion $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$. $F_X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{P}_X$. $\mathbb{P}_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

$$\sigma(\{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Integral: Falls $X \geqslant 0$, $X = \lim_n X_n$ mit X_n einfacher Z.V. (d.h. Z.V. mit nur endliche viele Werte)

$$\int_\Omega X_n \mathrm{d}\mathbb{P} := \sum_{t \in X_n(\Omega)} t \mathbb{P}\,(X_n^{-1}(\{t\})).$$

und $X \geqslant X_{n+1} \geqslant X_n$. Dann $\int X \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_n \int X_n \mathrm{d}\mathbb{P} \geqslant 0$.

Fur eine nicht-positive Z.V. s.d. $\int |X| \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$ (integrierbarkeit). $X = X_+ - X_-$, $\int X \mathrm{d}\mathbb{P} := \int X_+ \mathrm{d}\mathbb{P} - \int X_- \mathrm{d}\mathbb{P}$.

Eigenschäften der Integral: linearität, positivität (falls $X \geqslant 0$ dann $\int X \mathrm{d}\mathbb{P} \geqslant 0$), Jensen's Ungleichung, Markov Ungleichung, Monotone Konv., Fatou Lemma, Dominierte Konv.

$$\int_\Omega f(X(\omega)) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega f(X(\omega)) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega f(X) \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)$$

Lebesgue Maß $\mu: (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$: $\mu((a,b)) = |b-a|$.

$\mathbb{P}_X$ ist absolut stetig bzg. Leb wenn

$$\mathbb{P}_X((a,b)) = \int_a^b \rho(x) \mathrm{d}x$$

mit $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ s.d. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \mathrm{d}x = 1$, oder gleichwertig

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t \rho(x) \mathrm{d}x.$$

Wir schreiben $\mathrm{d}x = \mu(\mathrm{d}x)$ für die Lebesgue Maß.

Beispiel von Verteilungen. Diskrete: Bernoulli, Binomial, Geometrische, Poisson. Absolut stetig: Exponentiel, Gauß, Cauchy, Gleichverteilt Z.V.

$X \sim \mathscr{U}([a,b])$ $a < b$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_a^b f(x) \frac{\mathrm{d}x}{b-a}.$$

$X \sim \mathscr{U}(D)$, $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$, s.d. $\mathrm{Leb}(D) > 0$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\mathrm{Leb}(A \cap D)}{\mathrm{Leb}(D)}, \qquad \mathbb{E}[f(X)] = \int_D f(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{Leb}(D)}$$

z.B. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\{\text{offene Menge von } \mathbb{R}^2\})$ weil

$$D = \cup_{n\geqslant 1}\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1 - 1/n\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 1\}^c$$

$$\mathrm{Leb}(D) = \pi.$$

$X \sim \mathrm{Geo}(q)$, $X : \Omega \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\mathbb{P}(X = n) = q^{n-1}(1-q)$.
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$p(x) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)(2\pi\sigma^2)^{-1/2}.$$

$p \geqslant 1$, $X \in \mathscr{L}^p \Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.
Falls $X \in \mathscr{L}^1$ dann Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ existiert.
Falls $X \in \mathscr{L}^2$ dann Varianz existiert:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Unabhängigkeit und product Maß.
$A, B \in \mathscr{F}$ sind ($\mathbb{P}$-)unabhängig falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
$\mathscr{H}, \mathscr{G}$ σ-Algebren sind ($\mathbb{P}$-)unabhängig falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ für alle $A \in \mathscr{H}$ und $B \in \mathscr{G}$.
X, Y Z.V. sind ($\mathbb{P}$-)unabhängig falls $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ unabhängig sind, d.h.

$$\mathbb{P}(X \in A, X \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B), \qquad A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Falls X, Y sind unabhängig dann

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)].$$

Produkt Messraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$ mit $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 = \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\})$.

Produkt W-maß $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2) \to [0,1]$

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B) \qquad A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2.$$

Fubini, falls $f \geqslant 0$, messbar bzg. $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ dann

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y) = \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f(x,y)\mathbb{P}_2(\mathrm{d}y)\right]\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x) = \int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(x,y)\mathbb{P}_1(\mathrm{d}x)\right]\mathbb{P}_2(\mathrm{d}y)$$

Fubini-Tonelli $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ messbar bzg. $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$. Falls $|f|$ integrierbar ist bzl. $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$ dann sie können die dasselbe machen.

Faltungen: X, Y unabhängig. $Z = X + Y$.

$$\mathbb{P}_Z(A) = \int \mathbb{1}_{x+y\in A}\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)\mathbb{P}_Y(\mathrm{d}y)$$

Falls $\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y$ Ditchemn ρ_X, ρ_Y haben dann $\mathbb{P}_Z$ hat eine Dichte ρ_Z gegeben durch

$$\rho_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \rho_X(z-y)\rho_Y(y)\mathrm{d}y = (\rho_X * \rho_Y)(z).$$

Momentenerzeugendefkt. $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $M_X(t) = \exp(t^2/2)$.

$$\mathbb{E}[X^n] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n M_X(t)\bigg|_{t=0}.$$

Konvergenzbegriffe: in W-keit, in Verteilung, fast-sicher Konv, in $\mathscr{L}^p$.

$X_n \to X$ in W-keit: $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

$X_n \to X$ fast sicher

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\lim_n X_n = X\right\}\right) = 1.$$

Frage: Warum $\{\lim_n X_n = X\} \in \mathscr{F}$?

$X_n \to X$ in $\mathscr{L}^p$, $\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{\mathscr{L}^p} = 0$, $\|X\|_{\mathscr{L}^p} = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$. $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0$.

$X_n \to X$ in Verteilung falls

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$$

für alle $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (stetigen beschänken Funktionen). Oder $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ in alle Punkte t wo F_X stetig ist (konvergenz von Verteilungfkt). Oder $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (konvergenz von char. Fkt). Schwache konv von die Verteilungen $\mathbb{P}_{X_n}$ gegen $\mathbb{P}_X$:

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} \to \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mathbb{P}_X$$

für alle f beschrankt stetig.

$(X_n)_{n\geqslant 1}$ iid Z.V. mit $X_n \in \mathscr{L}^1$ dann (starke) GGZ:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}[X_1], \qquad \text{fast-sicher.}$$

CLT

$$\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}[X_1]) \to \mathscr{N}(0, \sigma^2)$$

in Verteilung mit $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_k) = \mathrm{Var}(X_1)$.

Irrfarth

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Rechnung mit Integralen

Weil die normierung von die Gauß $\mathscr{N}(0,1)$ Z.V. ist $(2\pi)^{-1/2}$?

Gauss Dichte:

$$p(x) = Ce^{-x^2/2}.$$

Können die konstante berechnen?

$$C^{-1} = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x??$$

$$C^{-2} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\mathrm{d}y \underset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underset{\text{pol. Kor.}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi)} e^{-r^2/2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-r^2/2} r\mathrm{d}r \int_{[0,2\pi)} \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} e^{-r^2/2} r\mathrm{d}r$$

$$\underset{z=r^2/2,\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r}{=\!=\!=\!=\!=} 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} e^{-z}\mathrm{d}z = 2\pi.$$

$C = (2\pi)^{-1/2}$.

Char. Fkt.

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}].$$

$$\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Stabile Verteilungen. Z s.d. $Z \sim p^\gamma Z' + q^\gamma Z''$ mit $p+q=1$ und $\gamma \in [1/2, 1]$.

$$\phi_Z(t) = e^{-c|t|^{1/\gamma}}.$$
