Infinite-Volume Gibbs Measures II

Ben Breitinger

17. Juni 2021

Gliederung

Wiederholung

Definition 1

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine Spezifikation. Ein Maß $\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ heißt kompatibel mit (oder spezifiziert durch) π, falls

$$\mu = \mu\pi_\Lambda, \qquad \forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$$

gilt. Die Menge alle solcher Maße nennen wir $\mathscr{G}(\pi)$.

Definition 2

Falls für jedes $B \Subset \mathbb{Z}^d$, $\Phi_B : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}_B$-messbar ist, so heißt die Familie $\Phi = \{\Phi_B\}_{B \Subset \mathbb{Z}^d}$ Potenzial. Die Hamilton-Funktion in der Box $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ bezüglich Φ ist gegeben durch

$$\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\omega) = \sum_{B \Subset \mathbb{Z}^d : B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B(\omega)$$

Damit $\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}$ wohldefiniert ist, nehmen wir an, dass Φ absolut summierbar ist:

$$\sum_{B \Subset \mathbb{Z}^d : i \in B} \|\Phi_B\|_\infty < \infty, \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

Ising Modell mit weiten Wechselwirkungen

$$\Phi_B(\omega) = \begin{cases} -J_{ij}\omega_i\omega_j & \text{falls } B = \{i,j\}, \\ -h\omega_i & \text{falls } B = \{i\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $J_{ij} \geq 0$.

Definition 3

Eine Spezifikation $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ heißt quasilokal, falls jeder Kern π_Λ stetig bezüglich der Randbedingung ist, das heißt, wenn für alle $C \in \mathscr{C}$, $\omega \mapsto \pi_\Lambda(C \mid \omega)$ stetig ist.

Das zentrale Existenzresultat des letzten Vortrags lautete

Theorem 4

Falls $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine quasilokale Spezifikation ist, dann ist $\mathscr{G}(\pi) \neq \emptyset$.

Eindeutigkeit von Gibbs-Maßen

Ziele und nächste Schritte

Wir suchen Bedingungen an eine Spezifikation π, die garantieren, dass $\mathscr{G}(\pi)$ aus nur einem Gibbs-Maß besteht.

Wir können hoffen, in der folgenden Situation solche Bedingungen zu finden.

- Die gesamte Interaktion eines Spins mit allen anderen Spins ist “klein”.

Idee

Es erscheint intuitiv, dass $\mathscr{G}(\pi)$ aus nur einem Element besteht, wenn π “in etwa” eine “unabhängige” Spezifikation ist. Wenn also die Wahrscheinlichkeit eines jeden Spins $\pi_{\{i\}}(\cdot \mid \omega)$ für alle $i \in \mathbb{Z}^d$ nur schwach von seiner Umgebung $\omega_{\{i\}^c}$ abhängt.

Wir werden in diesem Abschnitt $\pi_i(\cdot \mid \omega)$ für $\pi_{\{i\}}(\cdot \mid \omega)$ schreiben.

Wir wollen zunächst genauer untersuchen, wie sich eine Funktion f unter Anwendung von π_j verhält. Insbesondere interessiert uns, welchen Einfluss bestimmte $i \in \mathbb{Z}^d$ auf f (oder $\pi_j f$) haben. Das motiviert die Definition:

Definition 5

Definiere für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die Oszillation in $i \in \mathbb{Z}^d$ von f durch

$$\delta_i(f) := \sup_{\substack{\omega,\eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k \forall k \neq i}} |f(\omega) - f(\eta)|$$

Nun untersuchen wir $\delta_i(\pi_j f)$. Falls $i = j$ ist, so erhalten wir

$$\delta_i(\pi_i f) = \sup_{\substack{\omega,\omega' \in \Omega \\ \omega_k = \omega'_k \forall k \neq i}} |\pi_i f(\omega) - \pi_i f(\omega')| = \sup_{\substack{\omega,\omega' \in \Omega \\ \omega_k = \omega'_k \forall k \neq i}} \left| \sum_{\eta_i = \pm 1} [f(\eta_i \omega_{\{i\}^c}) \pi_i(\eta_i \,|\, \omega) - f(\eta_i \omega'_{\{i\}^c}) \pi_i(\eta_i \,|\, \omega')] \right| = 0$$

Sei nun $i \neq j$ und $\omega, \omega' \in \Omega$ mit $\omega_{\{i\}^c} = \omega'_{\{i\}^c}$. Wir schreiben $\tilde{f}(\eta) = f(\eta) - f((+1)_j \omega'_{\{j\}^c})$ und rechnen

$$|\pi_j f(\omega) - \pi_j f(\omega')| = |\pi_j \tilde{f}(\omega) - \pi_j \tilde{f}(\omega')| = \left| \sum_{\eta_j = \pm 1} [\pi_j(\eta_j | \, \omega) \tilde{f}(\eta_j \omega_{\{j\}^c}) - \pi_j(\eta_j | \, \omega') \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c})] \right|$$

$$= \left| \sum_{\eta_j = \pm 1} [\pi_j(\eta_j | \, \omega)(\tilde{f}(\eta_j \omega_{\{j\}^c}) - \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c})) - (\pi_j(\eta_j | \, \omega') - \pi_j(\eta_j | \, \omega)) \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c})] \right|$$

Nun schätzen wir die letzten beiden Summanden einzeln ab:

$$\left| \sum_{\eta_j = \pm 1} \pi_j(\eta_j | \, \omega)(\tilde{f}(\eta_j \omega_{\{j\}^c}) - \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c})) \right| \leq \sum_{\eta_j = \pm 1} \pi_j(\eta_j | \, \omega) \left| \tilde{f}(\eta_j \omega_{\{j\}^c}) - \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c}) \right| \leq \delta_i(f)$$

$$\left| \sum_{\eta_j = \pm 1} (\pi_j(\eta_j | \, \omega') - \pi_j(\eta_j | \, \omega)) \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c}) \right| \leq \max_{\eta_j = \pm 1} \left| \tilde{f}(\eta_j \omega'_{\{j\}^c}) \right| \sum_{\eta_j = \pm 1} |\pi_j(\eta_j | \, \omega') - \pi_j(\eta_j | \, \omega)|$$

$$\leq \delta_j(f) \|\pi_j(\cdot | \omega) - \pi_j(\cdot | \omega')\|_{TV}$$

Lemma 6 (Dusting-Lemma)

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $i, j \in \mathbb{Z}^d$. Dann gilt mit $c_{ji}(\pi) := \sup_{\substack{\omega, \omega' \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k \forall k \neq i}} \|\pi_j(\cdot \mid \omega) - \pi_j(\cdot \mid \omega')\|_{TV}$, dass $\delta_i(\pi_i f) = 0$ und

$$\delta_i(\pi_j f) \leq \delta_i(f) + c_{ji}(\pi) \delta_j(f), \qquad \text{für } i \neq j.$$

Nun setzen wir $f \in C(\Omega)$ voraus. Wir wissen, dass f dann einen Minimierer ω und einen Maximierer η besitzt. Außerdem ist f beschränkt. Da f stetig ist, gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(\eta') \geq f(\eta) - \varepsilon$ für $\eta' := \omega_{\mathrm{B}(n)^{\mathrm{c}}}\eta_{\mathrm{B}(n)}$.

$$\max f - \min f = f(\eta) - f(\omega) \leq f(\eta') - f(\omega) + \varepsilon \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \delta_i(f) + \varepsilon$$

Lemma 7

Sei $f \in C(\Omega)$. *Dann gilt*

$$\max f - \min f \leq \Delta(f)$$

mit $\Delta(f) := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \delta_i(f)$.

Bemerkungen

- Insbesondere gilt für $\mu, \nu \in \mathscr{M}_1(\Omega), f \in C(\Omega)$:

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq \Delta(f)$$

- Wir schreiben

$$\mathscr{O}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,:\, \Delta(f) < \infty\}, \qquad C_{\mathscr{O}}(\Omega) := C(\Omega) \cap \mathscr{O}(\Omega)$$

- Jede lokale Funktion f ist in $C_{\mathscr{O}}(\Omega)$. Denn für ein n groß genug gilt für alle $i \in B(n)^{\mathrm{c}}$, dass $\delta_i(f) = 0$.
- Sei $\omega \in \Omega$. Dann ist $\mathbb{1}_\omega \notin \mathscr{O}(\Omega)$

Lemma 8

Sei $f \in C_{\mathscr{O}}(\Omega)$, $\mu, \nu \in \mathscr{G}(\pi)$ *und* π *eine quasilokale Spezifikation. Gibt es ein* $\alpha \leq 1$, *sodass*

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq \alpha \Delta(f),$$

und ist $c(\pi) := \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_{ji}(\pi) < 1$ *dann gilt schon*

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)\alpha\Delta(f).$$

Wir beweisen die folgende Abschätzung mit Induktion über $i \in \mathbb{Z}^d$ bezüglich $\prec$:

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)\alpha \sum_{k \prec i} \delta_k(f) + \alpha \sum_{k \succeq i} \delta_k(f)$$

Der Grenzübergang $i \to \infty$ bezüglich $\prec$ mitsamt $\Delta(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \delta_k(f) < \infty$ liefert dann die Aussage. Im Induktionsschritt ist die Idee, die Induktionshypothese auf $\pi_i f$ anzuwenden. Wegen

$$\Delta(\pi_j f) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \delta_i(\pi_j f) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} [\delta_i(f) + c_{ji}\delta_j(f)] \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \delta_i(f) + c(\pi)\delta_j(f) < \infty$$

und, da π_i quasilokal, also $\pi_i f \in C(\Omega)$, ist, können wir die Induktionshypothese $\pi_i f$ anwenden und dann mit dem Dusting-Lemma weiterrechnen:

$$
\begin{aligned}
&|\mu(f) - \nu(f)| = |\mu(\pi_i f) - \nu(\pi_i f)| \\
\leq & c(\pi)\alpha \sum_{k \prec i} \delta_k(\pi_i f) + \alpha \sum_{k \succ i} \delta_k(\pi_i f) \\
\leq & c(\pi)\alpha \sum_{k \prec i} [\delta_k(f) + c_{ik}(\pi)\delta_i(f)] + \alpha \sum_{k \succ i} [\delta_k(f) + c_{ik}(\pi)\delta_i(f)] \\
\leq & c(\pi)\alpha \sum_{k \prec i} \delta_k(f) + \alpha \sum_{k \succ i} \delta_k(f) + \alpha\delta_i(f) \left(c(\pi) \sum_{k \prec i} c_{ik}(\pi) + \sum_{k \succ i} c_{ik}(\pi) \right) \\
\leq & c(\pi)\alpha \sum_{k \prec i} \delta_k(f) + \alpha \sum_{k \succ i} \delta_k(f) + \alpha\delta_i c(\pi) \\
= & c(\pi)\alpha \sum_{k \preceq i} \delta_k(f) + \alpha \sum_{k \succ i} \delta_k(f)
\end{aligned}
$$

Gilt im vorigen Lemma $c(\pi) < 1$, so bietet sich ein Kontraktionsargument an. Dies ist der Inhalt des folgenden

Theorem 9 (Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit)

Sei π *eine quasilokale Spezifikation, die*

$$c(\pi) < 1$$

erfüllt. Dann ist das durch π *spezifizierte Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig, also* $|\mathscr{G}(\pi)| = 1$.

Seien $\mu, \nu \in \mathscr{G}(\pi)$. Wir wollen zeigen, dass für alle lokalen Funktionen f die Gleichheit $\mu(f) = \nu(f)$ gilt. Dann folgt schon $\mu = \nu$ und damit $|\mathscr{G}(\pi)| = 1$.
Sei also f eine lokale Funktion. Wir zeigen induktiv für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)^n \Delta(f)$$

Da $\Delta(f) < \infty$ und $c(\pi) < 1$ muss dann schon $|\mu(f) - \nu(f)| = 0$ gelten.
Es wurde bereits gezeigt, dass $|\mu(f) - \nu(f)| \leq \Delta(f)$. Angenommen, es ist $|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)^n \Delta(f)$, so wähle $\alpha := c(\pi)^n \leq 1$. Dann kann wieder das obige Lemma angewandt werden und

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)\alpha\Delta(f) = c(\pi)^{n+1}\Delta(f).$$

gilt.

Beweisstrategie

Theorem 9
Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit

Lemma 7
Oszillations Ungleichung:
$\Delta(f) \geq \max(f) - \min(f)$

Lemma 8
Iterative Abschätzung:
$|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)\alpha\Delta(f)$

Lemma 6
Dusting-Lemma:
$\delta_i(\pi_j f) \leq \delta_i(f) + c_{ji}(\pi)\delta_j(f)$

Anwendungen auf Gibbs-Spezifikationen

Unser Ziel ist nun, Dobrushins Kriterium auf interessante Beispiele anzuwenden. Wir wollen zeigen, dass

- Eindeutigkeit des Gibbs-Maßes im klassischen Ising Modell bei $h = 0$ für $\beta < d/4$.
- Eindeutigkeit im Ising Modell mit weiten Wechselwirkungen bei $h = 0$ für $\beta \ll 1$ und $J_{ij} \leq f(\|i-j\|_\infty)$ mit $f = O\left(n^{-(d+\varepsilon)}\right)$
    - $f(n) \propto n^{-\alpha}$ für $\alpha > d$
    - $f(n) \propto \exp(-\alpha n)$ für $\alpha > 0$
    - ...

Theorem 10

Sei $\Phi = \{\Phi_B\}_{B \Subset \mathbb{Z}^d}$ *ein absolut summierbares Potenzial und gelte*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \neq i} \sum_{B \supset \{i,j\}} \delta(\Phi_B) < 1, \tag{1}$$

mit $\delta(\Phi_B) := \sup_{\omega,\omega'} |\Phi_B(\omega) - \Phi_B(\omega')|$. *Dann ist die Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit erfüllt, wonach es folglich nur ein Gibbs-Maß gibt, welches durch* π^Φ *spezifiziert wird.*

Einige Bemerkungen:

- Ist Φ translationsinvariant (dazu später mehr), dann reduziert sich die Ungleichung 1 auf

$$\sum_{j \neq 0} \sum_{B \supset \{0,j\}} \delta(\Phi_B) < 1$$

- Wir erhalten bereits die Eindeutigkeit im klassischen Ising Modell bei $h = 0$:
  - $\Phi_B(\omega) = -\beta\omega_i\omega_j$, falls $B = \{i,j\}$ mit $i \sim j$ und $\Phi_B = 0$ sonst.
  - Da $0 \in \mathbb{Z}^d$ genau $2d$ Nachbarn hat,

$$\sum_{j \neq 0} \sum_{B \supset \{0,j\}} \delta(\Phi_B) \leq 2d \cdot 2\beta$$

  - Mit obigem Theorem folgt Eindeutigkeit des Gibbs-Maßes für $\beta < 1/(4d)$

- Wir wenden nun das Korollar auf das Ising Modell mit weiten Wechselwirkungen an bei $h = 0$ an. In diesem Fall ist das Potenzial gegeben durch

$$\Phi_B(\omega) = \begin{cases} -J_{ij}\omega_i\omega_j & \text{falls } B = \{i,j\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Abschätzung der Form $J_{ij} \leq f(\|i-j\|_\infty)$ ist naheliegend. Wir leiten eine Bedingung an f her, die garantiert, dass für $\beta \ll 1$ das durch $\pi^{\beta\Phi}$ spezifizierte Gibbs-Maß eindeutig ist. Mit $\delta(\beta\Phi_B) \leq 2\beta\|\Phi_B\|_\infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\neq i}\sum_{B\supset\{i,j\}}\delta(\beta\Phi_B) &\leq 2\beta\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\neq i}\sum_{B\supset\{i,j\}}\|\Phi_B\|_\infty \leq 2\beta\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\neq i}f(\|i-j\|_\infty) \\ &= 2\beta\sum_{j\neq 0}f(\|j\|_\infty) \leq 2\beta\sum_{n\geq 0}2d\cdot(2n)^{d-1}f(n) \leq 2\beta 2^d d\sum_{n\geq 0}n^{d-1}f(n)\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist endlich, sofern $f \in O(n^{-d-\varepsilon})$. Dann ist $\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\neq i}\sum_{B\supset\{i,j\}}\delta(\Phi_B) < 1$ für $\beta \ll 1$.

Beweisskizze vom Theorem

- Wir wollen zeigen, dass für ein absolut summierbares Potenzial Φ

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\neq i}\sum_{B\supset\{i,j\}}\delta(\Phi_B)<1$$

impliziert, dass $c(\pi^\Phi)<1$ gilt.

- Die Definition von $c(\pi^\Phi)$ liefert, dass

$$c(\pi^\Phi)=\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}c_{ij}=\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall k\neq j}}\|\pi_i(\cdot\mid\omega)-\pi_i(\cdot\mid\omega')\|_{TV}<1$$

gelten muss, weshalb es reicht, die folgende Ungleichung für beliebige $\omega,\omega'\in\Omega$ mit $\omega_{\{j\}^c}=\omega'_{\{j\}^c}$ zu zeigen:

$$\|\pi_i(\cdot\mid\omega)-\pi_i(\cdot\mid\omega')\|_{TV}\leq\sum_{B\supset\{i,j\}}\delta(\Phi_B)$$

- Mit $\nu_t(\eta_i):=e^{-h_t(\eta_i)}/z_t$ und

$$z_t:=\sum_{\eta_i=\pm1}e^{-h_t(\eta_i)},\quad h_t(\eta_i):=t\mathscr{H}_{\{i\},\Phi}(\eta_i\omega_{\{i\}^c})+(1-t)\mathscr{H}_{\{i\},\Phi}(\eta_i\omega'_{\{i\}^c})$$

folgt

$$\|\pi_i^\Phi(\cdot\mid\omega)-\pi_i^\Phi(\cdot\mid\omega')\|_{TV}=\sum_{\eta_i=\pm1}|\pi_i^\Phi(\eta_i\mid\omega)-\pi_i^\Phi(\eta_i\mid\omega')|$$

$$=\sum_{\eta_i=\pm1}|\nu_1(\eta_i)-\nu_0(\eta_i)|=\sum_{\eta_i=\pm1}\left|\int_0^1\frac{d\nu_t(\eta_i)}{dt}dt\right|\leq\int_0^1\sum_{\eta_i=\pm1}\left|\frac{d\nu_t(\eta_i)}{dt}\right|dt,$$

$$\nu_t(\eta_i) := e^{-h_t(\eta_i)}/z_t, \quad z_t := \sum_{\eta_i=\pm 1} e^{-h_t(\eta_i)}, \quad h_t(\eta_i) := t\mathscr{H}_{\{i\},\Phi}(\eta_i\omega_{\{i\}^c}) + (1-t)\mathscr{H}_{\{i\},\Phi}(\eta_i\omega'_{\{i\}^c})$$

- Wir schreiben
$$\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) := \mathscr{H}_{\{i\},\Phi}(\eta_i\omega_{\{i\}^c}) - \mathscr{H}_{\{i\},\Phi}(\eta_i\omega'_{\{i\}^c})$$
womit wir unter Verwendung von $d(-h_t(\eta_i))/dt = \Delta\mathscr{H}_i(\eta_i)$ erhalten, dass
$$\frac{d\nu_t(\eta_i)}{dt} = \nu_t(\eta_i)\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) - \nu_t(\eta_i)\sum_{\eta_i=\pm 1}\nu_t(\eta_i)\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) = \left[\Delta\mathscr{H}_i - \mathbb{E}_{\nu_t}[\Delta\mathscr{H}_i]\right]\nu_t(\eta_i)$$

- Nun ist mit $m = (\max\Delta\mathscr{H}_i + \min\Delta\mathscr{H}_i)/2$
$$\sum_{\eta_i=\pm 1}\left|\frac{d\nu_t(\eta_i)}{dt}\right| = \mathbb{E}_{\nu_t}\left[\left|\Delta\mathscr{H}_i - \mathbb{E}_{\nu_t}[\Delta\mathscr{H}_i]\right|\right] \le \mathbb{E}_{\nu_t}\left[\left(\Delta\mathscr{H}_i - \mathbb{E}_{\nu_t}[\Delta\mathscr{H}_i]\right)^2\right]^{1/2} \le \mathbb{E}_{\nu_t}\left[(\Delta\mathscr{H}_i - m)^2\right]^{1/2}$$

- Mit $|\Delta\mathscr{H}_i - m| \le \frac{1}{2}\max_{\eta_i,\eta_i'=\pm 1}|\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) - \Delta\mathscr{H}_i(\eta_i')|$ erhalten wir
$$\|\pi_i^\Phi(\cdot \mid \omega) - \pi_i^\Phi(\cdot \mid \omega')\|_{TV} \le \frac{1}{2}\max_{\eta_i,\eta_i'=\pm 1}|\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) - \Delta\mathscr{H}_i(\eta_i')|$$

- Es verbleibt $|\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) - \Delta\mathscr{H}_i(\eta_i')|$ abzuschätzen:

$$|\Delta\mathscr{H}_i(\eta_i) - \Delta\mathscr{H}_i(\eta_i')|$$
$$= \left| \sum_{B \supset \{i,j\}} \left[\Phi_B(\eta_i \omega'_{\{i\}^c}) - \Phi_B(\eta_i \omega_{\{i\}^c}) \right] - \sum_{B \supset \{i,j\}} \left[\Phi_B(\eta_i' \omega'_{\{i\}^c}) - \Phi_B(\eta_i' \omega_{\{i\}^c}) \right] \right| \leq 2 \sum_{B \supset \{i,j\}} \delta(\Phi_B)$$

- Also
$$\|\pi_i^\Phi(\cdot \mid \omega) - \pi_i^\Phi(\cdot \mid \omega')\|_{TV} \leq \sum_{B \supset \{i,j\}} \delta(\Phi_B),$$

Ausblick

Es gibt ein weiteres wesentliches Ergebnis:

- **Eindeutigkeit falls $d = 1$**
  Falls $d = 1$, so gilt Eindeutigkeit für alle Potenziale, bei denen der Einfluss von weit entfernten Spins vernachlässigbar ist, dass $|\mathscr{G}(\pi)| = 1$. Dieses Ergebnis gilt insbesondere für alle Potenziale mit endlicher Reichweite und ist stärker als die bisherigen Resultate, da $\beta > 0$ beliebig ist.

Fragen?

(Symmetrien)

Idee

Besitzt eine Spezifikation π gewisse Symmetrien, so ist es naheliegend, dass die Maße in $\mathscr{G}(\pi)$ auch in einem gewissen Sinne invariant bezüglich der Symmetrien sind.

Vorgehensweise:

- Formalisierung von “Symmetrie”
- Invarianz von $\mathscr{G}(\pi)$ bezüglich Symmetrien, die π besitzt
- Invarianz von Gibbs-Maßen, falls diese eindeutig sind

Definition 11

Eine Transformation ist eine Familie von Abbildungen $(\tau_g)_{g\in \mathsf{G}}$ für eine Gruppe $(\mathsf{G}, \cdot)$, die die folgenden Bedingungen

- $(\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(\omega) = \tau_{g_1 \cdot g_2}(\omega)$ für alle $g_1, g_2 \in \mathsf{G}$, $\omega \in \Omega$ und
- $\tau_{\mathrm{id}}(\omega) = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei id $\in \mathsf{G}$ die Identität bezeichnet,

erfüllt. Außerdem definieren wir die Wirkung der Gruppe G auch auf Funktionen und Maße

$$\tau_g f(\omega) := f(\tau_g^{-1}\omega), \qquad \tau_g \mu(A) := \mu(\tau_g^{-1}A)$$

Wir schreiben $\tau_g \pi := \{\tau_g \pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$.

Einige Bemerkungen:

- Eigentlich wird hier der Begriff einer Gruppenaktion aus Ω definiert. Die Gruppe G operiert auf Ω.
- Für integrierbare Funktionen f lässt sich leicht nachrechnen, dass $\tau_g \mu(f) = \mu(\tau_g^{-1} f)$ gilt:

$$(\tau_g \mu)(f) = \int f(\omega)(\tau_g \mu)(d\omega) = \int f(\omega)\mu(\tau_g^{-1} d\omega) = \int f(\tau_g \omega)\mu(d\omega) = \mu(\tau_g^{-1} f)$$

Definition 12

Eine interne Transformation ist eine Transformation einer Gruppe G, die auf Ω^0 operiert. Wir erweitern die Aktion von G auf ganz Ω, indem wir

$$(\tau_g \omega)_i := \tau_g \omega_i$$

für alle $i \in \mathbb{Z}^d$ schreiben. Weiterhin schreiben wir

$$(\tau_g \pi)_\Lambda(A \mid \omega) := \pi_\Lambda(\tau_g^{-1} A \mid \tau_g^{-1} \omega).$$

Eine räumliche Transformation ist gegeben durch eine Gruppe G, die auf $\mathbb{Z}^d$ operiert. Wir setzen die Operation ebenso auf Ω und π_Λ aus:

$$(\tau_g \omega)_i := \omega_{\tau_g^{-1} i}, \qquad (\tau_g \pi)_\Lambda(A \mid \omega) := \pi_{\tau_g^{-1} \Lambda}(\tau_g^{-1} A \mid \tau_g^{-1} \omega)$$

Beispiele:

Sei von nun an $(\tau_g)_{g\in \mathsf{G}}$ eine interne Transformation.

Definition 13

Eine Spezifikation π heißt G-invariant, falls für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und $g \in \mathsf{G}$ die Identität $(\tau_g \pi)_\Lambda = \pi_\Lambda$ gilt.

Ein Beispiel:

- Im Ising-Modell bei $h = 0$ ist die Spezifikation π invariant unter der internen Transformation des Spin-Flips, das heißt unter der Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf Ω_0.

Theorem 14

Sei G eine interne Transformation und π eine G-invariante Spezifikation. Dann ist $\mathscr{G}(\pi)$ abgeschlossen unter der Wirkung von G: Ist $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$, so folgt $\tau_g\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ für alle $g \in \mathsf{G}$.

Sei $g \in \mathsf{G}$, $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $\omega \in \Omega$ und $A \in \mathscr{F}$. Wir zeigen, dass $\tau_g\mu$ kompatibel mit π ist:

$$\begin{aligned}(\tau_g\mu)(\pi_\Lambda(A)) = \mu(\pi_\Lambda(A \mid \tau_g(\cdot))) &= \int \pi_\Lambda(A \mid \tau_g(\omega))\mu(d\omega)\\ &= \int \pi_\Lambda(\tau_g^{-1}A \mid \omega)\mu(d\omega) = \mu(\pi_\Lambda(\tau_g^{-1}A)) = \mu(\tau_g^{-1}(A)) = \tau_g\mu(A)\end{aligned}$$

Folglich ist $\tau_g\mu \in \mathscr{G}(\pi)$.

Corollary 15

Falls $\mathscr{G}(\pi) = \{\mu\}$ und π eine G-invariante Spezifikation ist, so ist auch μ G-invariant.

Definition 16

Sei π eine G-invariante Spezifikation. Falls es ein $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ gibt, sodass $\tau_g \mu \neq \mu$, so sagen wir, dass die von G beschriebe Symmetrie spontan gebrochen wird unter μ.

Beispiele:

- Wir haben vorhin die Eindeutigkeit des Gibbs-Maßes μ im verschiedenen Varianten des Ising Modells bei hohen Temperaturen ($\beta \ll 1$) gesehen. In diesem Fall ist μ invariant unter globalem Spin-Flip.
- Ist das Gibbs-Maß hingegen nicht eindeutig und ist τ_g der globale Spin-Flip, so ist es naheliegend, dass $\tau_g \mu^+ = \mu^-$

Fragen?

Referenzen

Sacha Friedli and Yvan Velenik (2017)
Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction.
Cambridge University Press

Hans-Otto Georgii (2011)
Gibbs Measures and Phase Transitions.
De Gruyter