Gaussian Free Field auf $\mathbb{Z}^d$ Handout

Bearbeitung von: Dario Welz

July 2021

Definition des Modells

- $\Omega_\Lambda = \mathbb{R}^\Lambda$ und $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$
- $\omega_i \in \mathbb{R}$ ist der Spin vom Knoten $i \in \mathbb{Z}^d$
- Die Hamilton Funktion ist definiert als:

$$\mathcal{H}_{\Lambda;\beta,m}(\omega) := \frac{\beta}{2d} \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}^b_\Lambda} (\omega_i - \omega_j)^2 + \frac{m^2}{2} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i^2, \quad \omega \in \Omega,\ \beta \geq 0,\ m \geq 0$$

- Wir verwenden die Borel-σ-Algebra auf Ω_Λ und auf Ω die σ-Algebra $\mathcal{F}$ beruhend auf Zylindern.
- Seien $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und $\eta \in \Omega$, dann ist die Gibbsverteilung vom Gaussian Free Field(GFF) in Λ mit Randbedingung η, inverser Temperatur $\beta \geq 0$ und Masse $m \geq 0$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu^\eta_{\Lambda;\beta,m}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert durch:

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mu^\eta_{\Lambda;\beta,m}(A) := \int \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda;\beta,m}(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})}}{\mathbf{Z}^\eta_{\Lambda;\beta,m}} \mathbb{1}_A(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}) \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i$$

$$\text{mit: } \mathbf{Z}^\eta_{\Lambda;\beta,m} := \int e^{-\mathcal{H}_{\Lambda;\beta,m}(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})} \prod_{i \in \Lambda} d\omega_i$$

- Für $\omega_i' := \beta^{1/2}\omega_i$ gilt: $\mu^\eta_{\Lambda;\beta,m}(A) = \mu^{\eta'}_{\Lambda;1,m'}(\beta^{1/2}A), \quad \forall A \in \mathcal{F}$
  mit $m' := \beta^{\cdot 1/2} m$ und $\eta' := \beta^{1/2}\eta$
  Somit kann man o.B.d.A. $\beta = 1$ Annehmen, was im folgenden auch gemacht wird.
- Wir benötigen noch die Zufallsvariable $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi_i(\omega) := \omega_i, \quad i \in \mathbb{Z}^d,$$

  den Vektor $\varphi_\Lambda = (\varphi_i)_{i \in \Lambda}$ (mit $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$) und das Feld $\varphi := (\varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$

Gaussverteilte Vektoren und Felder

- **Definition 8.3**
  Ein Vektor φ_Λ ist Gaussverteilt, wenn für alle festen t_Λ, $t_\Lambda \cdot \varphi_\Lambda$ eine Gaussverteilte Variable ist (möglicherweise mit Varianz Null).

- Der Erwartungswert und die Varianz von $t_\Lambda \cdot \varphi_\Lambda$ ist folgendermaßen von t_Λ abhängig:

$$\mathbb{E}_\Lambda[t_\Lambda \cdot \varphi_\Lambda] = \sum_{i\in\Lambda} t_i \mathbb{E}_\Lambda[\varphi_\lambda] = t_\Lambda \cdot a_\Lambda$$

mit dem Erwartungswertvektor $a_\Lambda = (a_i)_{i\in\Lambda}$ und $a_i := \mathbb{E}_\lambda[\varphi_i]$

$$\mathrm{Var}_\Lambda(t_\Lambda \cdot \varphi_\Lambda) = \mathbb{E}_\Lambda[(t_\Lambda \cdot \varphi_\Lambda - \mathbb{E}_\Lambda[t_\Lambda \cdot \varphi_\Lambda])^2] = \sum_{i,j\in\Lambda} \Sigma_\Lambda(i,j) t_i t_j = t_\Lambda \cdot \Sigma_\Lambda t_\Lambda$$

mit der Kovarianzmatrix $\Sigma_\Lambda = (\Sigma_\Lambda(i,j))_{i,j\in\Lambda}$ und $\Sigma_\Lambda(i,j) :=\mathrm{Cov}_\Lambda(\varphi_i, \varphi_j)$

- **Theorem 8.4**
Sei φ_Λ Gaussverteilt mit Erwartungswertvektor a_Λ und Kovarianzmatrix Σ_Λ, Dann ist die Verteilung von φ_Λ absolut Stetig zum Lebesgue-Maß mit Dichte:

$$\frac{1}{(2\pi)^{|\Lambda|/2}\sqrt{|\det \Sigma_\Lambda|}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x_\Lambda - a_\Lambda) \cdot \Sigma_\Lambda^{-1}(x_\Lambda - a_\Lambda)\Big), \quad x_\Lambda \in \Omega_\Lambda$$

Umgekehrt, ist φ_Λ absolut Stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes und hat die gegebene Dichte, dann ist φ_Λ Gaussverteilt mit Erwartungswertvektor a_Λ und Kovarianzmatrix Σ_Λ.

- **Definition 8.5**
Eine unendliche Familie von Zufallsvariablen $\varphi = (\varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ ist ein Gaussverteiltes Feld, wenn für jedes $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, die Einschränkung φ_Λ Gaussverteilt ist.

- **Theorem 8.6**
Es sei $\varphi_{B(n)} \sim \mathcal{N}(a_{B(n)}, \Sigma_{B(n)})$. Falls für alle $i, j \in \mathbb{Z}^d$ die Limits

$$a_i := \lim_{n\to\infty} (a_{B(n)})_i \text{ und } \Sigma(i,j) := \lim_{n\to\infty} \Sigma_{B(n)}(i,j)$$

existieren und endlich sind, folgt:

  (i) Geht $n \to \infty$, dann konvergiert für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ die Verteilung von φ_Λ gegen eine Gaussverteilung mit:

$$a_\Lambda = (a_i)_{i\in\Lambda} \text{ und } \Sigma_\Lambda = (\Sigma(i,j))_{i,j\in\Lambda}$$

  (ii) Es gibt ein Gaussverteiltes Feld $\tilde{\varphi}$, mit $\tilde{\varphi}_\Lambda \sim \mathcal{N}(a_\Lambda, \Sigma_\Lambda)$

Harmonische Funktionen

- Sei $f = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ wir definieren für $\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\mathbb{Z}^d}$ den diskreten Gradient

$$(\nabla f)_{ij} := f_j - f_i$$

und für $i \in \mathbb{Z}^d$ den diskreten Laplace-Operator

$$(\Delta f)_i := \sum_{j:j\sim i} (\nabla f)_{ij}$$

- Wir können den Laplace-Operator umschreiben:

$$(\Delta f)_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \Delta_{ij} f_j, \quad i \in \mathbb{Z}^d \text{ mit } \Delta_{ij} = \begin{cases} -2d & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \sim j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  Zudem definieren wir:

$$(\Delta_\Lambda f)_i := \sum_{j\in\Lambda} \Delta_{ij} f_j \text{ und } f \cdot \Delta_\Lambda g := \sum_{i,j\in\Lambda} \Delta_{ij} f_i g_j$$

- Das Dirichlet Problem:
  Es wird eine Funktion u gesucht, sd. $(\Delta u)_i = 0 \;\; \forall i \in \Lambda$ und $u_i = \eta_i \;\; \forall i \in \Lambda^c$

- Das Dirichlet Problem hat maximal eine Lösung.

Der massefreie Fall

- Löst u das Dirichlet Problem, so kann die Hamilton Funktion in die folgende Form gebracht werden:

$$\mathcal{H}_{\Lambda;0} = \frac{1}{2}(\varphi - u) \cdot (-\frac{1}{2d}\Delta_\Lambda)(\varphi - u)$$

- $(-\frac{1}{2d}\Delta_\Lambda) = I_\Lambda - P_\Lambda$ mit $P(i,j) := \frac{1}{2d} \cdot \mathbb{1}_{\{j\sim i\}}$

- Nun beschreibt $(P(i,j))_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten eines symmetric simple randem walk $X = (X_k)_{k\geq 0}$ auf $\mathbb{Z}^d$

- $\tau_{\Lambda^c} := \inf\{k \geq 0 : X_k \notin \Lambda\} \implies \mathbb{P}_i(\tau_{\Lambda^c} < \infty) = 1 \;\; \forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$

- **Lemma 8.13**
  $G_\Lambda = (G_\Lambda(i,j))_{i,j\in\Lambda} = (I_\Lambda - P_\Lambda)^{-1}$ mit:

$$G_\Lambda(i,j) := \sum_{n=0}^{\tau_{\Lambda^c}-1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}} \text{ (Green Funktion des simple random walk in } \Lambda)$$

- **Lemma 8.15**
  Die Lösung des Dirichlet Problems ist u mit $u_i = \mathbb{E}_i[\eta_{X_{\tau_{\Lambda^c}}}] \;\; \forall i \in \mathbb{Z}^d$

- **Theorem 8.17**
  Unter $\mu^\eta_{\Lambda;0}$ ist φ_Λ Gaussverteilt mit Erwartungswertvektor aus 8.15 und Kovarianzmatrix aus 8.13.

- **Theorem 8.19**
  Für d = 1,2 existiert kein Gibbsmaß mit unendlichem Volumen ($\mathcal{G}(0) = \emptyset$)

- **Theorem 8.21**
  für $d \geq 3$ gilt $|\mathcal{G}(0)| = \infty$

Der massive Fall

- Für das massive Dirichlet Problem wird eine Funktion u gesucht, sd.

$$\big((-\frac{1}{2d}\Delta + m^2)u\big)_i = 0 \ \ \forall i \in \Lambda \text{ und } u_j = \eta_j \ \ \forall j \in \Lambda^c$$

- $\mathbb{Z}^d_\star := \mathbb{Z}^d \cup \{\star\}$ mit $\star \notin \mathbb{Z}^d$
- Die Übergangsmatrix zum neuen randem walk $(Z_k)_{k\geq 0}$ ist gegeben durch:

$$P_m(i,j) := \begin{cases} \frac{1}{1+m^2}\frac{1}{2d} & \text{falls } i,j \in +\mathbb{Z}^d, i \sim j \\ 1 - \frac{1}{1+m^2} & \text{falls } i \in \mathbb{Z}^d \text{ und } j = \star \\ 1 & \text{falls } i = j = \star \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\tau_\star := \inf\{k \geq 0 : Z_k = \star\}$ ist $\mathbb{P}$-fast sicher endlich.
- $\mathbb{P}^m_i(Z_n = j) = \mathbb{P}^m_i(\tau_\star > n)\mathbb{P}_i(X_n = j) = (1+m^2)^{-n}\mathbb{P}_i(X_n = j)$
- **Theorem 8.26**
  Mit $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, η eine beliebige Randbedingung und $\eta_\star := 0$ ist φ_Λ unter $\mu^\eta_{\Lambda;m}$ Gaussverteilt mit Eigenwertvektor u mit

$$u^m_i := \mathbb{E}^m_i[\eta_{Z_{\tau_{\Lambda^c}}}], \ \ \forall i \in \Lambda$$

  und Kovarianzmatrix $G_{m;\Lambda}$ mit

$$G_{m;\Lambda}(i,j) = \frac{1}{1+m^2}\mathbb{E}^m_i\Big[\sum_{n=0}^{\tau_{\Lambda^c}-1} \mathbb{1}_{\{Z_n=j\}}\Big]$$

- $G_m(i,j) := \lim_{n\to\infty} G_{m;B(n)}(i,j) = \frac{1}{1+m^2}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}^m_i(Z_n = j)$
- **Theorem 8.28**

$$\forall d \geq 1 \text{ und } m > 0 \ \text{ gilt } \ |\mathcal{G}(m)| = \infty$$