Handout zum Vortrag zur Pirogov-Sinai Theorie, 02.07.2021, Jakob Kellermann

Definition. *Der Hamiltonoperator des Blume-Capel Modells auf $\mathbb{Z}^d$ ist gegeben durch:*

$$\mathcal{H}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}_{\mathbb{Z}^d}} (\omega_i-\omega_j)^2 - h\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\omega_i - \lambda\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\omega_i^2\,,$$

wobei $\omega\in\{-1,0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Omega$.

Definition. *Sei Φ ein Potenzial auf $\mathbb{Z}^d$ und $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$, Ω der Raum der Konfigurationen.*

Für $\omega\in\Omega$ sind der allgemeine, (a), und der lokale Hamiltonoperator, (l), definiert durch:

$$(a)\colon \mathcal{H}_\Phi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{B\Subset\mathbb{Z}^d}\Phi_B(\omega), \qquad (l)\colon \mathcal{H}_{\Lambda,\Phi}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{B\Subset\mathbb{Z}^d\colon B\cap\Lambda\neq\emptyset}\Phi_B(\omega)$$

Die Zustandssumme für $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ mit Randbedingung η und der Druck eines Potenzials sind gegeben durch:

$$Z_\Phi^\eta(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\eta}\exp(-\beta\mathcal{H}_{\Lambda,\Phi}(\omega)), \qquad \Omega_\Lambda^\eta \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\omega\in\Omega\colon \omega_{\Lambda^c}=\eta_{\Lambda^c}\}$$

$$\Psi(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d}\frac{1}{\beta|\Lambda|}\log(Z_\Phi^\eta(\Lambda))$$

Definition. *Seien $\omega^1,\omega^2\in\Omega$. Wir schreiben $\omega_1 \stackrel{\infty}{=\!=} \omega_2$, falls eine endliche Menge $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ existiert, so dass $\omega^1_{\Lambda^c}=\omega^2_{\Lambda^c}$.*

Der relative Hamiltonoperator für $\omega^1 \stackrel{\infty}{=\!=} \omega^2$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{H}_\Phi(\omega^1|\omega^2) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{B\subset\mathbb{Z}^d}\{\Phi_B(\omega^1)-\Phi_B(\omega^2)\}$$

Definition. *Wir bezeichnen $\eta\in\Omega^{\text{per}}$ als (periodischen) Grundzustand, falls die* <u>*Energiedichte*</u> *minimal ist. Das bedeutet, dass für alle $\omega\in\Omega^{\text{per}}$ gilt:*

$$e_\Phi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|B(n)|}\mathcal{H}_{B(n),\Phi}(\eta) = \inf_{\omega\in\Omega^{\text{per}}} e_\Phi(\omega)$$

$g^{\text{per}}(\Phi)=\{\eta^1,\dots\eta^m\}$ ist die Menge der periodischen Grundzustände.

Wir nehmen an: $|g^{\text{per}}(\Phi)|<\infty$

Lemma. *Es gilt $\eta\in g^{\text{per}}(\Phi)$, genau dann wenn $\eta\in\Omega^{\text{per}}$ und für alle $\omega\in\Omega$ mit $\eta \stackrel{\infty}{=\!=} \omega$ gilt, dass:*

$$\mathcal{H}_\Phi(\omega|\eta)\geqslant 0$$

Definition. *Sei $\omega \in \Omega$. Ein Knoten $i \in \mathbb{Z}^d$ heißt $\#$ korrekt, falls für alle $j \in i + B(1)$ gilt, dass $\omega_j = \eta_j^{\#}$, $\eta^{\#} \in g^{\mathrm{per}}(\Phi)$. Der inkorrekte Rand von ω ist:*

$$\mathcal{B}(\omega) = \{ i \in \mathbb{Z}^d | \forall \# \in \{1, \ldots, m\} \colon i \text{ ist nicht } \#\text{-korrekt} \}$$

Der verdickte inkorrekte Rand von ω ist:

$$\Gamma(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \{ i + B(1) | i \in \mathcal{B}(\omega) \} = \mathcal{B}(\omega) \cup \partial^{\mathrm{ex}} \mathcal{B}(\omega)$$

Definition. *Ein Potential Φ erfüllt <u>Peierl's Bedingung</u> genau dann, wenn:*

1. $|g^{\mathrm{per}}(\Phi)| < \infty$
2. *Es existiert $\rho > 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega$, $\omega \stackrel{\infty}{=\!=} \eta^{\#} \in g^{\mathrm{per}}(\Phi)$, gilt:*

   $$\mathcal{H}_{\Phi}(\omega | \eta) \geqslant \rho |\Gamma(\omega)|,$$

   ρ ist Peierl's Konstante.

Lemma. *Falls Φ^0 Peierl's Bedingung mit $\rho > 0$ und $\|W\| \leqslant \rho / 4$, so gilt schon:*

$$g^{\mathrm{per}}(\Phi^0 + W) \subset g^{\mathrm{per}}(\Phi^0)$$

Definition. *Sei $\omega \in \Omega$, $\eta \in g^{\mathrm{per}}(\Phi)$, $\omega \stackrel{\infty}{=\!=} \eta$, dann kann man $\Gamma(\omega)$ in maximale Zusammenhangskomponenten zerlegen:*

$$\Gamma(\omega) = \{ \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n \}$$

Das Tupel $\gamma_i = (\bar{\gamma}_i, \omega_{\bar{\gamma}_i})$ bezeichnen wir als Kontur. $\bar{\gamma}_i$ ist der Träger der Kontur und $\omega_{\bar{\gamma}_i}$ beschreibt die Restriktion von ω zu $\bar{\gamma}_i$.

Für ein beliebiges i betrachten wir eine Zerlegung von $\bar{\gamma}_i{}^c$ in maximale Zusammenhangskomponenten:

$$\bar{\gamma}_i{}^c = \{ A_0, \ldots, A_k \}$$

Die einzige unbeschränkte Menge A_j bezeichnen wir mit $\mathrm{ext}(\gamma_i)$, o.B.d.A. $A_0 = \mathrm{ext}(\gamma_i)$.

Mit $\mathrm{lab}(A_j)$ bezeichen wir das $\# \in \{1, \ldots, m\}$, so dass:

$$\forall q \in \partial^{\mathrm{ex}}(A_j) \colon \omega_q = \eta_q^{\#}, \eta^{\#} \in g^{\mathrm{per}}(\Phi)$$

Der <u>Typ</u> unserer Kontur ist $\mathrm{lab}(\mathrm{ext}(\gamma_i)) \in \{1,\ldots,m\}$. $C^{\#}$ ist die Menge der Konturen vom Typ $\#$.

Das Interior vom Typ $\# \in \{1, \ldots, m\}$ ist:

$$\mathrm{int}_{\#} \gamma_i \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup_{q \in \{1, \ldots, k\}, \mathrm{lab}(A_q) = \#} A_q$$

Das Interior ist:

$$\mathrm{int} \gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \bigcup_{\# \in \{1, \ldots, m\}} \mathrm{int}_{\#} \gamma_i = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

Definition. *Die Zustandssumme* $Z_\Phi^\#(\neq Z_\Phi^{\eta^\#})$ *ist:*

$$Z_\Phi^\#(\Lambda) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda^\#} \exp(-\beta\mathcal{H}_{\Lambda,\Phi}(\omega)), \quad \Omega_\Lambda^\# \overset{\text{def}}{=\!=} \{\omega\in\Omega_\Lambda^{\eta^\#}: d(\Gamma(\omega),\Lambda^c)>1\}$$

Weiterhin:

$$\Xi_\Phi^\#(\Lambda) \overset{\text{def}}{=\!=} e^{\beta\mathcal{H}_{\Lambda,\Phi}(\eta^\#)} Z_\Phi^\#(\Lambda)$$

Definition. *Zwei Konturen* $\gamma_1,\gamma_2\in C^\#$ *sind kompatibel genau dann, wenn gilt:*

$$d_\infty(\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2)>1$$

Lemma. *Eine Zerlegung von* $\Xi_\Phi^\#(\Lambda)$ *ist gegebene durch:*

$$\Xi_\Phi^\#(\Lambda) = \sum_\Gamma \prod_{\gamma_i\in\Gamma} w^\#(\gamma_i)\,,$$

wobei die Summe über alle Mengen von kompatiblen Konturen in Λ *vom Typ* $\#$ *ist. Die Gewichte* $w^\#$ *sind gegeben durch:*

$$w^\#(\gamma_i) \overset{\text{def}}{=\!=} e^{-\beta\|\gamma'\|}\prod_{\#'} \frac{Z_\Phi^{\#'}(\mathrm{int}_{\#'}\gamma_i)}{Z_\Phi^\#(\mathrm{int}_{\#'}\gamma_i)} = e^{-\beta\|\gamma'\|}\prod_{\#'} \frac{e^{-\beta\mathcal{H}_{\mathrm{int}_{\#'}(\gamma_i)}(\eta^{\#'})}}{e^{-\beta\mathcal{H}_{\mathrm{int}_{\#'}(\gamma_i)}(\eta^\#)}} \frac{\Xi_\Phi^{\#'}(\mathrm{int}_{\#'}\gamma_i)}{\Xi_\Phi^\#(\mathrm{int}_{\#'}\gamma_i)}\,,$$

Die Oberflächenenergie $\|\gamma'\|$ *ist definiert als:*

$$\|\gamma'\| \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{B\subset\bar{\gamma}_i} \{\Phi_B(\omega_{\bar{\gamma}_i}) - \Phi_B(\eta^\#)\}$$

Definition. *Eine Gewichtsfunktion* $w^\#$ *ist* τ*-stabil für ein* $\tau>0$*, falls gilt:*

$$w^\#(\gamma)\leqslant e^{-\tau|\bar{\gamma}|}$$

Definition. *Wir sagen, dass* $\gamma\in C^\#$ *die Größe* n *hat und schreiben* $\gamma\in C_n^\#$*, wenn gilt:*

$$|\mathrm{int}(\gamma)|=n$$

Definition. *Für* $\gamma\in C_0^\#$*, definiere die beschränkten Objekte:*

$$\widehat{\Psi}_0{}^\# \overset{\text{def}}{=\!=} -e^\#$$

$$\hat{w}^\#(\gamma) \overset{\text{def}}{=\!=} w^\#(\gamma) = e^{-\beta\|\gamma\|}$$

Wir nehmen an, dass $\hat{w}^\#(\gamma)$ *für alle* γ *mit* $|\mathrm{int}(\gamma)|\leqslant n$ *definiert ist:*

$$\hat{\Xi}_n^\#(\Lambda) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{\Gamma\,\text{komp.},|\mathrm{int}(\gamma)|\leqslant n}\ \prod_{\gamma\in\Gamma} \hat{w}^\#(\gamma)$$

$$\widehat{Z}_n{}^\# \overset{\text{def}}{=\!=} e^{-\beta e^\#|\Lambda|}\hat{\Xi}_n^\#(\Lambda)$$

Definition. *Der beschränkte Druck ist:*

$$\hat{\Psi}_n^{\#} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\beta|B(k)|} \log(\hat{Z}_n^{\#}(B(k)))$$

Die beschränkten Gewichte $\hat{w}^{\#}$ *für* $\gamma \in C_{n+1}^{\#}$ *sind:*

$$\hat{w}^{\#}(\gamma) = e^{-\beta\|\gamma\|} \prod_{\#'} \left\{ \chi((\hat{\Psi}_n^{\#'} - \hat{\Psi}_n^{\#}) \mathrm{int}_{\#'}(\gamma)^{1/d}) \frac{Z^{\#'}(\mathrm{int}_{\#'}\gamma)}{Z^{\#}(\mathrm{int}_{\#'}\gamma)} \right\},$$

wobei $\chi \in C^1, \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ *und* $\chi(x \geqslant \rho_0/2) = 0, \chi(x \leqslant \rho_0/4) = 1.$

Lemma. *Der Limes des beschränkten Drucks existiert:*

$$\hat{\Psi}^{\#} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \hat{\Psi}_n^{\#}$$

Theorem. *Definiere* $U_\beta^{\#} \overset{\text{def}}{=\!=} \{(\lambda,h) || \lambda|, |h| \leqslant \rho/8, \hat{\Psi}^{\#} = \max_{\#'} \hat{\Psi}^{\#'}\}$. *Die Gewichte* $\hat{w}^{\#}(\gamma)$ *sind* τ*-stabil, und es existiert* $0 < \beta_0 < \infty$*, so dass für* $\beta \geqslant \beta_0, (\lambda,h) \in U_\beta^{\#}$ *gilt:*

$$\forall \gamma \in C^{\#}, (\lambda,h) \in U_\beta^{\#}: \quad \hat{w}^{\#}(\gamma) = w^{\#}(\gamma)$$

Falls $(\lambda,h) \in U_\beta^{\#}$*, ist der echte Druck des Modells gegeben durch:*

$$\Psi(\lambda,h) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta|B(n)|} \log(Z^{\#}(B(n)))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta|B(n)|} \log(\hat{Z}^{\#}(B(n))) = \hat{\Psi}^{\#}(\lambda,h)$$

Auf den Rändern der Regionen $U_\beta^{\#}$ *findet ein Phasenübergang statt, der Druck ist dort nicht differenzierbar.*

"Ludwig Boltzmann, who spend much of his life studying statistical mechanics, died in 1906, by his own hand.

Paul Ehrenfest, carrying on the work, did similarly in 1933.

Now it is our turn to study statistical mechanics.

Perhaps it will be wise to approach the subject carefully."

David L. Goodstein, Introduction to "States of Matter"

Literatur:

1. Sasha Friedli and Yvan Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction.* Cambridge University Press, 2017.

2. Roberto Fernandez. *Contour Ensembles and the Description of Gibbsian Probability Distributions at Low Temperature.* Instituto de Matema´tica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1997