DAS ISING-MODELL - TEIL II

CARLOTTA GERSTEIN

Definition 1 Es gibt bei (β, h) eine Zustandsänderung erster Ordnung, falls für ein Tupel (β, h) mindestens zwei Gibbs-Zustände konstruiert werden können.

Satz 2 Es gelten folgende Aussagen:

1. Für alle $d \geq 1$ gilt: Falls $h \neq 0$ gibt es einen eindeutigen Gibbs-Zustand für alle $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
2. Für $d = 1$ gibt es einen eindeutigen Gibbs-Zustand für jedes $(\beta, h) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$
3. Falls $h = 0$ und $d \geq 2$ gibt es ein $\beta_c = \beta_c(d) \in (0, \infty)$ sodass:
   Falls $\beta < \beta_c$ ist der Gibbs-Zustand bei $(\beta, 0)$ eindeutig
   Falls $\beta > \beta_c$ gibt es mindestens zwei Gibbs-Zustände
$$\langle \cdot \rangle^+_{\beta;h} \neq \langle \cdot \rangle^-_{\beta;h}$$

Satz 3 Sei $(\beta, h) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es gibt einen eindeutigen Gibbs-Zustand bei (β, h)
2. $\langle \cdot \rangle^+_{\beta;h} = \langle \cdot \rangle^-_{\beta;h}$
3. $\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta;h} = \langle \sigma_0 \rangle^-_{\beta;h}$

Proposition 4 Für jede Folge $\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d$ existieren die Grenzwerte
$$m^+(\beta, h) := \lim_{\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d} m^+_\Lambda(\beta, h) \qquad m^-(\beta, h) := \lim_{\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d} m^-_\Lambda(\beta, h)$$
und es gilt
$$m^+(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta;h} \qquad m^-(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle^-_{\beta;h}$$
Zudem ist $h \mapsto m^+(\beta, h)$ rechtsstetig und $h \mapsto m^-(\beta, h)$ linksstetig.

Definition 5 Die kritische inverse Temperatur ist definiert als
$$\beta_c(d) := \inf \{\beta \geq 0 : m^*(\beta) > 0\} = \sup \{\beta \geq 0 : m^*(\beta) = 0\}$$

Satz 6 Es gelten die folgenden Aussagen für alle $\beta \geq 0$ und $h \in \mathbb{R}$:
$$\frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, h) = m^+(\beta, h) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial h^-}(\beta, h) = m^-(\beta, h)$$
Insbesondere ist $h \mapsto \psi(\beta, h)$ differenzierbar in h genau dann, wenn es in (β, h) einen eindeutigen Gibbs-Zustand gibt.

Notation $I(i, E) := |\{j \in \mathbb{Z}^d : \{i, j\} \in E\}|$
$\mathbf{E}^{+,g}_\Lambda := \{E \subset \mathcal{E}^b_\Lambda : I(i, E)$ ist gerade für alle $i \in \Lambda\}$
$\mathbf{E}^{+,0}_\Lambda := \{E \subset \mathcal{E}^b_\Lambda : I(i, E)$ ist gerade für alle $i \in \Lambda \backslash \{0\}$ aber $I(0, E)$ ist ungerade$\}$

Grundlage des Vortrags Friedli, Sacha and Yvan Velenik. Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction. Cambridge, United Kingdom; New York, NY: Cambridge University Press, 2017