Das Ising-Modell - Teil I

Daniela Söllheim

Grundlegende Definitionen.

1. **Energie** : $\mathcal{H}^{\#}_{\Lambda,\beta,h} = -\beta \sum_{i,j\in\mathcal{E}_\Lambda} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - h\sum_{i\in\Lambda} \sigma_i(\omega)$ für $\omega \in \Omega_\Lambda$
2. **Verteilung** : $\mu^{\#}_{\Lambda,\beta,h} = (Z^{\#}_{\Lambda,\beta,h}(\omega))^{-1} e^{-\mathcal{H}^{\#}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)}$ mit $Z^{\#}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} e^{-\mathcal{H}^{\#}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)}$
3. **Erwartungswert der Funktion f unter** $\mu^{\#}_{\Lambda,\beta,h}$: $\langle f\rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h} = \sum_{\omega\in\Omega^{\#}_\Lambda} f(\omega)\mu^{\#}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)$

Defintion 1.

Der **Druck** in $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, wobei Λ endlich ist, mit beliebiger Randbedingung von Typ # ist definiert durch

$$\psi^{\#}_\Lambda(\beta,h) := \frac{1}{|\Lambda|} log Z^{\#}_{\Lambda,\beta,h}$$

Satz 2.

Im thermodynamischen Limes ist der Druck

$$\psi(\beta,h) = \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d} \psi^{\#}_\Lambda(\beta,h)$$

wohldefiniert und unabhängig von der Folge $\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d$ und von dem Typ der Randbedingung. Außerdem ist ψ konvex (als eine Funktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R}$) und gerade als eine Funktion von h.

Definition 3.

Die **Magnetisierungsdichte** in $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ist definiert als

$$m_\Lambda := \frac{1}{|\Lambda|} M_\Lambda$$

wobei $M_\Lambda := \sum_{i\in\Lambda}\sigma_i$ die **totale Magnetisierung** ist.
Wir definieren ebenso für ein $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$

$$m^{\#}_\Lambda(\beta,h) := \langle m_\Lambda\rangle^{\#}_{\Lambda,\beta,h}$$

Lemma 4.

Für alle $h \notin \mathfrak{B}_\beta$ ist die durchschnittliche Magnetisierungsdichte

$$m(\beta,h) = \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d} m^{\#}_\Lambda(\beta,h)$$

wohldefiniert, unabhängig von der Folge $\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d$ und von der Randbedingung und erfüllt

$$m(\beta,h) = \frac{\partial\psi}{\partial h}(\beta,h)$$

Außerdem ist die Funktion $h \to m(\beta,h)$ monoton steigend auf $\mathbb{R}\setminus\mathfrak{B}_\beta$ und ist stetig in jedem $h \notin \mathfrak{B}_\beta$. Allerdings ist es in jedem $h \in \mathfrak{B}_\beta$ unstetig:

$$\lim_{h'\downarrow h} m(\beta,h) = \frac{\partial\psi}{\partial h^+}(\beta,h), \quad \lim_{h'\uparrow h} m(\beta,h) = \frac{\partial\psi}{\partial h^-}(\beta,h)$$

Insbesondere ist die spontane Magnetisierung

$$m^*(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h)$$

immer wohldefiniert.

Definition 5.

In dem Punkt (β, h) liegt eine **Zustandsänderung erster Ordnung** vor, wenn $h \to \psi(\beta, h)$ in diesem Punkt nicht differenzierbar ist.

Satz 6.

In der Dimension $d = 1$ ist der Druck $\psi(\beta, h)$ des eindimensionalen Ising-Modells für alle $\beta \geq 0$ und alle $h \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi(\beta, h) = log[e^{\beta} \cosh(h) + \sqrt{e^{2\beta} \cosh^2(h) - 2\sinh(2\beta)}]$$

Daraus folgt, dass es im eindimensionalen Ising-Modell keine Zustandsänderung erster Ordnung gibt. Außerdem haben wir gesehen, dass in der ersten Dimension paramagnetisches Verhalten vorliegt.

Definition 7.

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist **lokal**, wenn ein endliches $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ existiert, sodass $f(\omega) = f(\omega\prime)$ sofern sich ω und $\omega\prime$ auf Δ entsprechen.
Die kleinste dieser Mengen Δ wird der **Träger** von f genannt und mit $supp(f)$ bezeichnet.

Definition 8.

Ein **Zustand** (**im unendlichen Raum**) ist eine Abbildung, die zu jeder lokalen Funktion f eine reelle Zahl $\langle f \rangle$ zuordnet, sodass

1. $\langle 1 \rangle = 1$ (Normalisation)

2. $f \geq 0 \Rightarrow \langle f \rangle \geq 0$ (Positivität)

3. Für $\lambda \in \mathbb{R} : \langle f + \lambda g \rangle = \langle f \rangle + \lambda \langle g \rangle$ (Linearität)

Die Zahl $\langle f \rangle$ nennt man **Durchschnitt von f** im Zustand $\langle \cdot \rangle$

Definition 9.

Sei $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ und $(\#_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Randbedingungen. Die Folge der Gibbsverteilungen $(\mu^{\#_n}_{\Lambda_n, \beta, h})_{n \geq 1}$ konvergiert zu dem Zustand $\langle \cdot \rangle$ genau dann, wenn $\lim_{n \to \infty} \langle f \rangle^{\#_n}_{\Lambda_n, \beta, h} = \langle f \rangle$ für jede lokale Funktion f. Den Zustand nennt man **Gibbs** $-$ **Zustand** (in (β, h)).

Definition 10.

Die **Translation** von $j \in \mathbb{Z}^d$ ist die Abbildung $\Theta_j : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$, die definiert ist durch $\Theta_j i = i + j$
Für eine Konfiguration $\omega \in \Omega$ gilt dann, dass Θ_ω definiert ist durch $(\Theta_j \omega)_i = \omega_{\omega_{i-j}}$
Ein Zustand $\langle \cdot \rangle$ ist **translationsinvariant**, wenn $\langle f \circ \Theta_j \rangle = \langle f \rangle$ für jede lokale Funktion f und für alle $j \in \mathbb{Z}^d$

Definition 11.

Für alle endlichen $A \subset \mathbb{Z}^d$ sei

$$\sigma_A := \prod_{j \in A} \sigma_j \qquad \mathfrak{n}_A := \prod_{j \in A} \mathfrak{n}_j$$

wobei $\mathfrak{n}_\mathrm{j} := \frac{1}{2}(1 + \sigma_j)$

Satz 13. (**GKS – Ungleichung**)

Seien $\beta \geq 0, h \geq 0$ Für alle $A,\ B \subset \Lambda$ gilt

$$\langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda, \beta h} \geq 0$$
$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle^+_{\Lambda, \beta, h} \geq \langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda, \beta, h} \ \langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda, \beta, h}$$

Die Ungleichungen gelten für die Randbedingungen $+,\ \varnothing,\ per$

Satz 14. (**FKG – Ungleichung**)

Seien $\beta > 0, h \geq 0$. Sei $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ endlich und $\#$ eine beliebige Randbedingung.
Dann gilt für jedes Paar monton steigender Funktionen f und g:

$$\langle f \circ g \rangle^\#_{\Lambda, \beta, b} \geq \langle f \rangle^\#_{\Lambda, \beta, h} \ \langle g \rangle^\#_{\Lambda, \beta, h}$$

Satz 17.

Sei $\beta \geq 0, h \in \mathbb{R}$ und $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$. Die Gibbs-Verteilung im endlichen Volumen mit $+$ oder $-$ Randbedingung konvergiert zum Gibbs-Zustand im unendlichen Volumen:

$$\langle \cdot \rangle^+_{\beta, h} = \lim_{n \to \infty} \langle \cdot \rangle^+ \quad \text{bzw.} \quad \langle \cdot \rangle^-_{\beta, h} = \lim_{n \to \infty} \langle \cdot \rangle^-$$

Die Zustände $\langle \cdot \rangle^+_{\beta, h},\ \ \langle \cdot \rangle^-_{\beta, h}$ sind unabhängig von $(\Lambda)_{n \geq 1}$ und beide translationsinvariant.

Grundlage des Vortrags ist das Buch: Friedli, Sacha, and Yvan Velenik. Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction. Cambridge, United Kingdom; New York, NY: Cambridge University Press, 2017.