Handzettel zum Vortrag über das Curie Weiss Modell

Carolin Eschenauer

Definition 1

Die **Curie-Weiss-Hamilton** für eine Sammlung von Spins ω=$(\omega_1, ..., \omega_N)$ mit inverser Temperatur β und mit externem magnetischen Feld h ist definiert durch:

$$\mathcal{H}_{N;\beta;h}^{CW}(\omega) := -\frac{d\beta}{N}\sum_{i;j=1}^{n}\omega_i\omega_j - \sum_{i=1}^{n}\omega_i$$

Die **Gibbs Verteilung** ist wie folgt definiert:

$$\mu_{N;\beta;h}(\omega) := -\frac{e^{-\mathcal{H}_{N;\beta;h}^{CW}(\omega)}}{Z_{N;\beta;h}^{CW}} \ mit \ Z_{N;\beta;h}^{CW} := \sum_{\omega\in\Omega_N} e^{-\mathcal{H}_{N;\beta;h}^{CW}}$$

Satz 2

$(h = 0)$ Sei $\beta_c := \beta_c(d) := \frac{1}{2d}$ Dann gilt Folgendes:

1. Wenn $\beta \leq \beta_c$, konzentriert sich die Magnetisierung in Null, d.h.$\forall\epsilon > 0\exists c = c(\beta;\epsilon) > 0$, s.d. für ausreichend große N gilt:

$$\mu_{N;\beta;0}^{CW}(m_N \in (-\epsilon;\epsilon)) \geq 1 - 2e^{-cN}$$

2. Wenn $\beta > \beta_c$, dann existiert ein $m^{*;CW}(\beta) > 0$ (**spontane Magnetisierung**), s.d. für ausreichend kleine $\epsilon > 0$ ein $b = b(\beta;\epsilon) > 0$ existiert, s.d. wenn
$J_*(\epsilon) := (-m^{*;CW}(\beta) - \epsilon; -m^{*;CW}(\beta) + \epsilon) \cup (m^{*;CW}(\beta) - \epsilon; m^{*;CW}(\beta) + \epsilon)$
Dann gilt für ausreichend große N :

$$\mu_{N;\beta;0}^{CW}(m_N \in (J_*(\epsilon))) \geq 1 - 2e^{-bN}$$

Man nennt β_c die **inverse kritische Tempertatur** bzw. die **inverse Curie Temperatur**.

Definition 3

Sei $e(m) := -dm^2$ und $s(m) := -\frac{1-m}{2}log(\frac{1-m}{2}) - \frac{1+m}{2}log(\frac{1+m}{2})$
Dann nennen wir $f_\beta^{CW}(m) := \beta e(m) - s(m)$ die **freie Energie** des Curie Weiss Modells.

Proposition 4

Für jedes β gilt

$$lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}logZ_{N;\beta;0}^{CW} = -min_{m\in[-1;1]}f_\beta^{CW}(m)$$

Außerdem gilt für jedes Intervall $J \subset [-1;1]$

$$lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}log\mu_{N;\beta;0}^{CW} = -min_{m\in J}I_\beta^{CW}(m)$$

mit $I_\beta^{CW}(m) = f_\beta^{CW}(m) - min_{\tilde{m}\in[-1;1]}f_\beta^{CW}(\tilde{m})$

Satz 5

Der **Druck** $\psi_\beta^{CW}(h) := lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}logZ_{N;\beta;h}^{CW}$ existiert und ist konvex in h. Zudem entspricht der Druck der Legendre Transformation der freien Energie:

$$\psi_\beta^{CW}(h) = max_{m\in[-1;1]}[hm - f_\beta^{CW}(m)]$$

Grundlage des Vortrags: S. Friedli und Y. Velenik (2017): The Curie-Weiss-Model. In: S. Friedli und Y. Velenik: Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction. (Cambridge University Press) Cambridge. S. 57-78.