Gibbs-Maß auf unendlichen Gittersystemen

Moritz Berg

Notation:

- Falls S $= \mathbb{Z}^d$ schreiben wir $\Omega = \Omega_S$
- Für $\omega, \eta \in \Omega_\Lambda$ schreiben wir $\omega_\Lambda, \eta_\Lambda$
- Sei $\Delta \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ dann ist für $\omega \in \Omega_\Lambda$ $\omega_\Delta = \omega_{|\Delta}$ eingeschränkt auf Δ.
  Weiter schreiben wir $\omega_\Lambda = \eta_\Delta \eta\prime_{\Lambda \setminus \Delta}$ für $\eta, \eta\prime \in \Omega$, um Konfigurationen von Gebieten zu verknüpfen.

Problemstellung

Definition (Zylinder):
Sei für $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $\Pi_\Lambda : \Omega \to \Omega_\Lambda$: die Projektion und $A \in \mathscr{P}(\Omega_\Lambda)$, dann ist

$$\Pi_\Lambda^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \omega_\Lambda \in A\}$$

ein Zylinder zur Basis Λ und

$$\mathscr{C}(\Lambda) := \{\Pi_\Lambda^{-1}(A) : A \in \mathscr{P}(\Omega_\Lambda)\}$$

die Menge aller Ereignisse die nur von Spins in Λ abhängen.

Definition (σ-Algebra):
Sei $S \subset \mathbb{Z}^d$ **nicht notwendigerweise endlich** und sei

$$\mathscr{C}_S := \cup_{\Lambda \Subset S} \mathscr{C}(\Lambda),$$

dann ist

$$\mathscr{F}_S := \sigma(\mathscr{C}_S)$$

die kleinste σ-Algebra von lokalen Ereignissen in S.

Definition (Marginal):
Sei $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ *und* $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ die **marginale Verteilung** von μ auf Λ ist definiert als:

$$\mu|_\Lambda := \mu \circ \Pi_\Lambda^{-1}.$$

Satz 6.6 (Kolmogorovs Erweiterungssatz):
Sei $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$, $\mu_\Lambda \in \mathscr{M}_1(\Omega_\Lambda)$, **konsistent**, d.h.

$$\forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d : \ \mu_\Delta = \mu_\Lambda \circ (\Pi_\Delta^\Lambda)^{-1}, \ \forall \Delta \subset \Lambda.$$

Dann existiert ein eindeutiges $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, so dass $\mu_{|\Lambda} = \mu_\Lambda$ für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$.

DLR Ansatz

Lemma 6.7:
Für alle $\Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und alle beschränkten messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt :

$$\langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda;\beta,h} = \langle \langle f \rangle^{\cdot}_{\Delta;\beta,h} \rangle^{\eta}_{\Lambda;\beta,h} \qquad \forall \eta \in \Omega$$

Definition (Kern):
Sei $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$. Ein **Kern** von $\mathscr{F}_{\Lambda^C}$ nach $\mathscr{F}$ ist die Abbildung $\pi_\Lambda : \mathscr{F} \times \Omega \to [0,1]$ mit folgenden Eingenschaften:

- Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\pi_\Lambda(\cdot|\omega)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$.
- Für alle $A \in \mathscr{F}$ ist $\pi_\Lambda(A|\cdot)$ $\mathscr{F}_{\Lambda^C}$-messbar.

Falls weiter gilt:

$$\pi_\Lambda(B|\omega) = \mathbb{1}_B(\omega), \qquad \forall B \in \mathscr{F}_{\Lambda^C}$$

für alle $\omega \in \Omega$ ist π_Λ **zulässig**.

Definition (Komposition von Kernen):
Für π_Λ, π_Δ definieren wir die **Komposition**:

$$\pi_\Lambda \pi_\Delta(A|\eta) := \int \pi_\Delta(A|\omega)\pi_\Lambda(d\omega|\eta).$$

Analog wird $\mu\pi_\Lambda$ für ein $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ definiert:

$$\mu\pi_\Lambda(A) := \int \pi_\Lambda(A|\omega)\mu(d\omega).$$

Definition (Spezifikation):
Eine **Spezifikation** ist eine Familie $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ von zulässigen Kernen die **konsistent** sind, d.h.:

$$\pi_\Lambda \pi_\Delta = \pi_\Lambda \quad \forall \Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$$

Definition (kompatibel):
Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine Spezifikation. Ein Maß $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ heißt **kompatibel** mit π, falls

$$\mu\pi_\Lambda = \mu \quad \forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d.$$

Grundlage des Vortrags ist das Buch: Friedli, Sacha, and Yvan Velenik. Statistical Mechanics of Lattice Systems: A ConcreteMathematical Introduction. Cambridge, United Kingdom; New York, NY: Cambridge University Press, 2017.

Gibbs-Spezifikation

Definition (Potential):

Sei $B \Subset \mathbb{Z}^d$ und $\Phi_B : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{F}_B$-messbare Funktion, dann ist $\Phi = \{\Phi_B\}_{B\Subset\mathbb{Z}^d}$ ein Potential.
Der assoziierte Hamiltonian auf dem Gebiet Λ ist definiert als:

$$\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\omega) := \sum_{B\Subset\mathbb{Z}^d:\ B\cap\Lambda\neq\emptyset} \Phi_B(\omega), \quad \forall\omega\in\Omega$$

Definition (Gibbsspezifikation):

Für jede Konfiguration $\tau_\Lambda\omega_{\Lambda^c}$ definieren wir die **Gibbs-Spezifikation** $\pi^\Phi = \{\pi_\Lambda^\Phi\}_{\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d}$ als:

$$\pi_\Lambda^\Phi(\tau_\Lambda|\omega) := \frac{1}{Z_{\Lambda;\Phi}^\omega} e^{-\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\tau_\Lambda\omega_{\Lambda^c})}$$

mit

$$Z_{\Lambda;\Phi}^\omega := \sum_{\tau_\Lambda\in\Omega_\Lambda} e^{-\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\tau_\Lambda\omega_{\Lambda^c})}$$

Definition (Unendliches Gibbs-Maß):

Für eine Gibbs-Spezifikation π^Φ zum Potential Φ heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, das kompatibel mit π^Φ ist, **unendliches Gibbs-Maß** assoziiert zu Φ.

Existenz

Definition (Konvergenz auf Ω):

Eine Reihe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\omega^* \in \Omega$ falls,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_j^{(n)} = \omega_j^*, \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d$$

Wir schreiben $\omega^{(n)} \to \omega^*$.

Proposition 6.20 (Kompaktheit von Ω):

Ω ist **folgenkompakt**, d.h. für jede Folge $(\omega^{(n)})_{n\geq1} \subset \Omega$ gibt es ein $\omega^* \in \Omega$ und eine Teilfolge $(\omega^{(n_k)})_{k\geq1}$ s.d. $\omega^{(n_k)} \to \omega^*$

Definition (Stetigkeit):

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls aus $\omega^{(n)} \to \omega$ folgt $f(\omega^{(n)}) \to f(\omega)$. Die Menge der stetigen Funktionen schreiben wir als $C(\Omega)$.

Definition (Quasilokalität):

Eine Funktion f heißt **quasilokal**, falls es eine Folge $(g_n)_{n\geq1}$ von lokalen Funktionen gibt sd. $||g_n - f||_\infty \to 0$.

Lemma 6.21:

f ist stetig $\Leftrightarrow$ f quasilokal ist.

Aufgabe 6.13:

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda\Subset\mathbb{Z}^d}$ quasilokal. Für ein festes Λ gilt:

$$f \in C(\Omega) \Rightarrow \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$$

Grundlage des Vortrags ist das Buch: Friedli, Sacha, and Yvan Velenik. Statistical Mechanics of Lattice Systems: A ConcreteMathematical Introduction. Cambridge, United Kingdom; New York, NY: Cambridge University Press, 2017.

Lemma 6.22:
Falls $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1. $\mu = \nu$
2. $\mu(C) = \nu(C)$ für alle $C \in \mathscr{C}$.
3. $\mu(g) = \nu(g)$ für alle lokalen Funktionen g.
4. $\mu(f) = \nu(f)$ für alle $f \in C(\Omega)$.

Aufgabe 6.12:
1. $\mu_n \Rightarrow \mu$
2. $\mu_n(f) \to \mu(f)$ für alle lokalen Funktionen f.
3. $\mu_n(f) \to \mu(f)$ für alle $f \in C(\Omega)$.
4. $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$, wenn wir für alle $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega)$ den Abstand definieren als

$$\rho(\mu, \nu) := \sup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \max_{C \in \mathscr{C}(B(k))} |\mu(C) - \nu(C)|.$$

Satz 6.24 (Kompaktheit von $\mathscr{M}(\Omega)$):
$\mathscr{M}(\Omega)$ ist **folgenkompakt**, d.h. für jede Folge $(\mu_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{M}(\Omega)$ gibt es ein $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ und eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_{k\geq 1}$ s.d. $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$ für $k \to \infty$.

Satz 6.26 (Existenz):
Falls $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ quasilokal ist, gilt $\mathscr{G}(\pi) \neq \emptyset$.

Grundlage des Vortrags ist das Buch: Friedli, Sacha, and Yvan Velenik. Statistical Mechanics of Lattice Systems: A ConcreteMathematical Introduction. Cambridge, United Kingdom; New York, NY: Cambridge University Press, 2017.