Gibbs-Maß auf unendlichen Gittersystemen

Moritz Berg
Universität Bonn

June 11, 2021

Worum geht es eigentlich?

- Konstruktion des Gibbs-Maßes im Unendlichen und Existenz
- Eindeutigkeit und Symmetrien
- Unterklasse von Gibbs-Maßen

Überblick

1. Problemstellung
2. DLR Ansatz
3. Gibbs-Spezifikation
4. Existenz

Problem mit unendlichen Systemen

$$\sum_{i \in \Lambda} \sim \to \infty$$

- Bisher haben wir Gibbs-Maß definiert als $\mu^{+}_{\Lambda;\beta,h}(\omega) = \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda;\beta,h}(\omega)}}{\mathcal{Z}^{+}_{\Lambda;\beta,h}} = 0$
- Hamiltonian und Partitionsfunktion sind nicht wohldefiniert
- D.h. die Wahrscheinlichkeit von jeder Konfiguration wäre 0

Schon bekannt

Definitionen

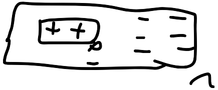
Spinmenge :	Ω_0	*Bsp.* $\{-1, 1\}$
Gitter :	$S \subset \mathbb{Z}^d$	*Bsp.* $\{3, 4, 5\}^d$
Spinkonfiguration :	$\Omega_S := \Omega_0^S = \{(\omega_i)_{i \in S} : \omega_i \in \Omega_0 \forall i \in S\}$	
Hamiltonian :	$\mathcal{H}_\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}$	*mit* $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$

Notation

Notation

- Falls S $= \mathbb{Z}^d$ schreiben wir $\Omega = \Omega_S$
- Für $\omega, \eta \in \Omega_\Lambda$ schreiben wir $\omega_\Lambda, \eta_\Lambda$
- Sei $\Delta \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ dann ist für $\omega \in \Omega_\Lambda$ $\omega_\Delta = \omega_{|\Delta}$ eingeschränkt auf Δ.
  Weiter schreiben wir $\omega_\Lambda = \eta_\Delta \eta'_{\Lambda \setminus \Delta}$ für $\eta, \eta' \in \Omega$, um Konfigurationen von Gebieten zu verknüpfen.

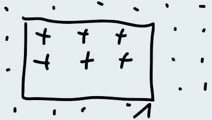
$\eta = +$; $\eta' = -$



Definition (Zylinder)

Sei für $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, $\Pi_\Lambda : \Omega \to \Omega_\Lambda$: die Projektion und $A \in \mathscr{P}(\Omega_\Lambda)$, dann ist $A = \{+\}$

$$\Pi_\Lambda^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : \omega_\Lambda \in A\}$$



ein Zylinder zur Basis Λ und

$$\mathscr{C}(\Lambda) := \{\Pi_\Lambda^{-1}(A) : A \in \mathscr{P}(\Omega_\Lambda)\}$$

die Menge aller Ereignisse die nur von Spins in Λ abhängen.

σ-Algebra von Zylindern

Definition (σ-Algebra von Zylindern)

Sei $S \subset \mathbb{Z}^d$ **nicht notwendigerweise endlich** und sei

$$\mathscr{C}_S := \cup_{\Lambda \Subset S} \mathscr{C}(\Lambda),$$

dann ist

$$\mathscr{F}_S := \sigma(\mathscr{C}_S)$$

die kleinste σ-Algebra von lokalen Ereignissen in S.

σ-Algebra von Zylindern

Definition (σ-Algebra von Zylindern)

Sei $S \subset \mathbb{Z}^d$ **nicht notwendigerweise endlich** und sei

$$\mathscr{C}_S := \cup_{\Lambda \Subset S} \mathscr{C}(\Lambda),$$

dann ist

$$\mathscr{F}_S := \sigma(\mathscr{C}_S)$$

die kleinste σ-Algebra von lokalen Ereignissen in S.

Bsp. $\{\omega\} \in \mathscr{F}$: Betrachten $B(n) := \{-n, ..., n\}^d \Subset \mathbb{Z}^d$
Dann ist $\Pi^{-1}_{B(n)}(\omega) \in \mathscr{C}_{\mathbb{Z}^d}$ und deshalb $\cap_{n\in\mathbb{N}} \Pi^{-1}_{B(n)}(\omega) = \{\omega\} \in \cancel{\mathscr{C}_{\mathscr{F}}}$
$\mathscr{F}$

Messbare und lokale Funktionen

Lemma 6.3

Eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $\mathscr{F}_S$-messbar genau dann, wenn $\exists \phi : \Omega_S \to \mathbb{R}$, sd.

$$g(\omega) = \phi(\omega_S)$$

- lokale Funktionen sind $\mathscr{F}_S$-messbar für ein $S \subset \Omega$

auf S $\quad g(\omega) = g(\omega')$ falls $\omega_S = \omega'_S$

Marginale

Definition (Marginal)

Sei $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ *und* $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ die **marginale Verteilung** von μ auf Λ ist definiert als:

$$\mu|_\Lambda := \mu \circ \Pi_\Lambda^{-1}.$$

Für alle $\Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ sei $\Pi_\Delta^\Lambda : \Omega_\Lambda \to \Omega_\Delta$ die kanonische Projektion. Dann gilt für alle Marginale:

$$\mu|_\Delta = \mu|_\Lambda \circ (\Pi_\Delta^\Lambda)^{-1}$$

Kolmogorovs Erweiterungssatz

Satz 6.6 (Kolmogorovs Erweiterungssatz)

Sei $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$, $\mu_\Lambda \in \mathscr{M}_1(\Omega_\Lambda)$, **konsistent**, d.h.

$$\forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d : \ \mu_\Delta = \mu_\Lambda \circ (\Pi^\Lambda_\Delta)^{-1}, \ \forall \Delta \subset \Lambda.$$

Dann existiert ein eindeutiges $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, so dass $\mu_{|\Lambda} = \mu_\Lambda$ für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$.

Kolmogorovs Erweiterungssatz

Satz 2 (Kolmogorovs Erweiterungssatz)

Sei $\{\mu_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$, $\mu_\Lambda \in \mathscr{M}_1(\Omega_\Lambda)$, **konsistent**, d.h.

$$\forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d: \ \mu_\Delta = \mu_\Lambda \circ (\Pi^\Lambda_\Delta)^{-1}, \ \forall \Delta \subset \Lambda.$$

Dann existiert ein eindeutiges $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, so dass $\mu_{|\Lambda} = \mu_\Lambda$ für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$.

- erster Ansatz in Wahrscheinlichkeitstheorie um Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf überabzählbaren Produkträumen zu zeigen
- stellen lokale Anforderungen an das Wahrscheinlichkeitsmaß

Warum nicht Kolmogorovs Erweiterungssatz?

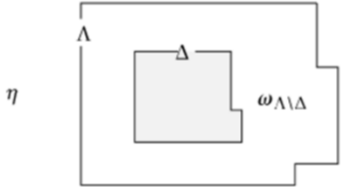
Gegenbeispiel

- betrachten Ising-Modell mit $d = 2,\ h = 0$ und wollen Marginal vom Ursprung σ_0
- $\sigma_0 \sim Ber(p)$, wir wollen p bestimmen
- für hinreichend großes β hängt der Erwartungswert von σ_0 vom Gibbs-Zustand ab
- es gibt verschiedene Gibbs-Zustände, die zu den selben Parametern $\beta,\ h$ gehören
- makroskopischer Zustand nötig, um Marginale aufzustellen

DLR Ansatz

Dobrushin, Lanford und Ruelle

- betrachten bedingte Erwartungswerte anstatt Marginalen
- nutzen aber eine ähnliche Konsistenzbedingung
- der Erwartungswert von lokalen Funktionen f hängt nur von der Konfiguration auf Δ ab



Konsistenzbedingung für bedingte Erwartungswerte

Lemma 6.7

Für alle $\Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und alle beschränkten messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt :

$$\langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda;\beta,h} = \langle \langle f \rangle^{\cdot}_{\Delta;\beta,h} \rangle^{\eta}_{\Lambda;\beta,h} \qquad \forall \eta \in \Omega$$

- Für den Beweis vereinfachen wir die Notation und lassen β *und* h weg

Beweis

$$\langle \langle f \rangle_{\Delta}^{\cdot} \rangle_{\Lambda}^{\eta} = \sum_{\omega_\Lambda} \langle f \rangle_{\Delta}^{\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^\eta}$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} = \sum_{\omega_\Lambda} \langle f\rangle^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

$$= \sum_{\omega_\Lambda} \sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c}) \frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle_\Delta^{\cdot}\rangle_\Lambda^\eta = \sum_{\omega_\Lambda} \langle f\rangle_\Delta^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^\eta}$$

$$= \sum_{\omega_\Lambda}\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c}) \frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z_\Delta^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^\eta}$$

$$\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c}) - \mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c}) = \mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c}) - \mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} = \sum_{\omega_\Lambda} \langle f\rangle^{\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}}_{\Delta} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

$$= \sum_{\omega_\Lambda} \sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) \frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}} \frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

$$\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) - \mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) = \mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) - \mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c})$$
$$\Leftrightarrow -\mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) = \mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) - \mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) - \mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c})$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} = \sum_{\omega_\Lambda}\langle f\rangle^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

$$= \sum_{\omega_\Lambda}\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

$$= \sum_{\omega_\Lambda}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}\Big)\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} &= \sum_{\omega_\Lambda}\langle f\rangle^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}} \\
&= \sum_{\omega_\Lambda}\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}} \\
&= \sum_{\omega_\Lambda}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}\Big)\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}} \\
&= \sum_{\omega_\Lambda}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}
\end{aligned}
$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} = \sum_{\omega_\Lambda}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}$$

$$= \sum_{\omega_{\Lambda/\Delta}}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{\sum_{\omega_\Delta} e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} = \sum_{\omega_\Lambda}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}$$

$$= \sum_{\omega_{\Lambda/\Delta}}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{\sum_{\omega_\Delta} e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}$$

mit $\omega'_\Lambda = \omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}$

$$= \sum_{\omega'_\Lambda} f(\omega'_\Lambda\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

Beweis

$$\langle\langle f\rangle^{\cdot}_{\Delta}\rangle^{\eta}_{\Lambda} = \sum_{\omega_\Lambda}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}$$

$$= \sum_{\omega_{\Lambda/\Delta}}\Big(\sum_{\omega'_\Delta} f(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}\Big)\frac{\sum_{\omega_\Delta} e^{-\mathscr{H}_\Delta(\omega_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}}_{\Delta}}$$

mit $\omega'_\Lambda = \omega'_\Delta\omega_{\Lambda/\Delta}$

$$= \sum_{\omega'_\Lambda} f(\omega'_\Lambda\eta_{\Lambda^c})\frac{e^{-\mathscr{H}_\Lambda(\omega'_\Lambda\eta_{\Lambda^c})}}{Z^{\eta}_{\Lambda}}$$

$$= \langle f\rangle^{\eta}_{\Lambda}$$

Kern

Definition (Kern)

Sei $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$. Ein **Kern** von $\mathscr{F}_{\Lambda^c}$ nach $\mathscr{F}$ ist die Abbildung $\pi_\Lambda : \mathscr{F} \times \Omega \to [0,1]$ mit folgenden Eingenschaften:

- Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\pi_\Lambda(\cdot|\omega)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$.
- Für alle $A \in \mathscr{F}$ ist $\pi_\Lambda(A|\cdot)$ $\mathscr{F}_{\Lambda^c}$-messbar.

Falls weiter gilt:

$$\pi_\Lambda(B|\omega) = \mathbb{1}_B(\omega), \qquad \forall B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}$$

für alle $\omega \in \Omega$ ist π_Λ **zulässig**.

Kern

Definition (Kern)

Sei $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$. Ein **Kern** von $\mathscr{F}_{\Lambda^c}$ nach $\mathscr{F}$ ist die Abbildung $\pi_\Lambda : \mathscr{F} \times \Omega \to [0,1]$ mit folgenden Eingenschaften:

- Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\pi_\Lambda(\cdot|\omega)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$.
- Für alle $A \in \mathscr{F}$ ist $\pi_\Lambda(A|\cdot)$ $\mathscr{F}_{\Lambda^c}$-messbar.

Falls weiter gilt:

$$\pi_\Lambda(B|\omega) = \mathbb{1}_B(\omega), \qquad \forall B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}$$

für alle $\omega \in \Omega$ ist π_Λ **zulässig**.

Bsp. unabhängige ZV. mit Wahrscheinlichkeitsverteilung ρ_i von ω_i für $i \in \mathbb{Z}^d$
$\pi_\Lambda(A|\omega) = \sum_{\omega' \in A} \prod_{i \in \Lambda} \rho_i(\omega'_i) \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda \omega_{\Lambda^c})$

Komposition von Kernen

Definition (Komposition von Kernen)

Für π_Λ, π_Δ definieren wir die **Komposition**:

$$\pi_\Lambda \pi_\Delta(A|\eta) := \int \pi_\Delta(A|\omega)\pi_\Lambda(d\omega|\eta).$$

Analog wird $\mu\pi_\Lambda$ für ein $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ definiert:

$$\mu\pi_\Lambda(A) := \int \pi_\Lambda(A|\omega)\mu(d\omega).$$

- $\pi_\Lambda \pi_\Delta$ ist wieder zulässig

Spezifikation

Definition (Spezifikation)

Eine **Spezifikation** ist eine Familie $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ von zulässigen Kernen die **konsistent** sind, d.h.:

$$\pi_\Lambda \pi_\Delta = \pi_\Lambda \quad \forall \Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$$

Spezifikation

Definition (Spezifikation)

Eine **Spezifikation** ist eine Familie $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ von zulässigen Kernen die **konsistent** sind, d.h.:

$$\pi_\Lambda \pi_\Delta = \pi_\Lambda \quad \forall \Delta \subset \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$$

Bsp. unahb. ZV.:

$$\pi_\Lambda \pi_\Delta(A|\eta) = \sum_{\omega \in \Omega} \Big(\sum_{\omega' \in A} \prod_{i \in \Delta} \rho_i(\omega'_i) \mathbb{1}_A(\omega'_\Delta \omega_{\Delta^c}) \Big) \prod_{j \in \Lambda} \rho_j(\omega_j) \mathbb{1}_\omega(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})$$

$$= \sum_{\omega_{\Lambda/\Delta}} \Big(\sum_{\omega' \in A} \prod_{i \in \Delta} \rho_i(\omega'_i) \mathbb{1}_A(\omega'_\Delta \omega_{\Lambda/\Delta} \eta_{\Lambda^c}) \Big) \prod_{j \in \Lambda/\Delta} \rho_j(\omega_j) = \sum_{\omega \in A} \prod_{i \in \Lambda} \rho_i(\omega_i) \mathbb{1}_A(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}) = \pi_\Lambda(A|\eta)$$

Kompatible Maße

Definition (kompatibel)

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine Spezifikation. Ein Maß $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ heißt **kompatibel** mit π, falls

$$\mu\pi_\Lambda = \mu \quad \forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d.$$

Bsp. unabh. ZV.:
Das Produktmaß $\mu(\omega) = \prod_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho_i(\omega_i)$ ist das kompatible Maß zu der Spezifikation von unabhängigen Zufallsvariablen.

Kompatible Maße

Definition (kompatibel)

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine Spezifikation. Ein Maß $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ heißt **kompatibel** mit π, falls

$$\mu\pi_\Lambda = \mu \quad \forall \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d.$$

- die Menge der kompatiblen Maße von π heißt $\mathscr{G}(\pi)$.
- mit dieser Definition kann man Maße μ auf unendlichen Gittern konstruieren

Gibbs-Spezifikation

- bisher ganz allgemeine Spezifikationen und Maße betrachtet
- Gibbs Spezifikationen beschreiben die Modelle aus diesem Buch
- generalisiert das Ising Modell, indem Interaktionen zwischen verschiedenen Mengen von Spins betrachtet werden

Potential

Definition (Potential)

Sei $B \Subset \mathbb{Z}^d$ und $\Phi_B : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{F}_B$-messbare Funktion, dann ist $\Phi = \{\Phi_B\}_{B \Subset \mathbb{Z}^d}$ ein Potential.
Der assoziierte Hamiltonian auf dem Gebiet Λ ist definiert als:

$$\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\omega) := \sum_{B \Subset \mathbb{Z}^d:\ \underline{B \cap \Lambda \neq \emptyset}} \Phi_B(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

- Falls Φ endliche Reichweite hat ist die Summe endlich
- Falls Φ nicht endliche Reichweite hat, nehmen wir an, dass Φ_B absolut summierbar ist

Potential des Ising-Modells

Beispiel: Potential des Ising-Modells

$$\Phi_B(\omega) = \begin{cases} -\beta\omega_i\omega_j & \text{falls B=\{i,j\}},\ i \sim j, \\ -\underline{h\omega_i} & \text{falls B=\{\underline{i}\}}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gibbs-Spezifikation

Definition (Gibbs-Spezifikation)

Für jede Konfiguration $\tau_\Lambda \omega_{\Lambda^c}$ definieren wir die **Gibbs-Spezifikation** $\pi^\Phi = \{\pi_\Lambda^\Phi\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ als:

$$\pi_\Lambda^\Phi(\tau_\Lambda | \omega) := \frac{1}{Z_{\Lambda;\Phi}^\omega} e^{-\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\tau_\Lambda \omega_{\Lambda^c})}$$

mit

$$Z_{\Lambda;\Phi}^\omega := \sum_{\tau_\Lambda \in \Omega_\Lambda} e^{-\mathscr{H}_{\Lambda;\Phi}(\tau_\Lambda \omega_{\Lambda^c})}$$

Lemma 6.15

$$\pi^\Phi = \{\pi_\Lambda^\Phi\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d} \textit{ ist eine Spezifikation}$$

- der Beweis funktioniert ähnlich zu dem von Lemma 6.7

Unendliches Gibbs-Maß

Definition (Unendliches Gibbs-Maß)

Für eine Gibbs-Spezifikation π^Φ zum Potential Φ heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, das kompatibel mit π^Φ ist, **unendliches Gibbs-Maß** assoziiert zu Φ.

- unterschiedliche Potentiale können zur selben Spezifikation führen
- dann beschreiben sie auch den selben physikalischen Zustand. Man sagt auch sie sind physikalisch äquivalent

Phase-Transition

Definition (Phase-Transition)

Falls $\mathscr{G}(\pi^{\Phi})$ mindestens zwei verschiedene Maße enthält, $|\mathscr{G}(\pi^{\Phi})| > 1$, gibt es eine first-order Phase Transition für das Potential Φ

Existenz

- Bedingung für die Existenz gesucht
- Beweis nutzt Kompaktheit von Ω
- Wir brauchen topologische Notation
- Wir brauchen Endlichkeit der Spinmenge

Konvergenz auf Ω

Definition (Konvergenz auf Ω)

Eine Reihe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\omega^* \in \Omega$ falls,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_j^{(n)} = \omega_j^*, \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d$$

Wir schreiben $\omega^{(n)} \to \omega^*$.

- zwei Elemente aus Ω liegen nah zusammen, wenn sie auf einer großen Menge um den Ursprung gleich sind.

Kompaktheit von Ω

Proposition 6.20 (Kompaktheit von Ω)

Ω ist **folgenkompakt**, d.h. für jede Folge $(\omega^{(n)})_{n\geq 1} \subset \Omega$ gibt es ein $\omega^* \in \Omega$ und eine Teilfolge $(\omega^{(n_k)})_{k\geq 1}$ s.d. $\omega^{(n_k)} \to \omega^*$

Beweis

Sei $(\omega^{(n)})_{n\geq 1} \in \Omega$ eine Folge und $\{i_1, i_2, i_3, ...\}$ eine beliebige Nummerierung von $\mathbb{Z}^d$

1. betrachten $(\omega_{i_1}^{(n)})_{n\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_1}^{(n_1,j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert

Beweis

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$n_1 = 1, \underline{3}, 5, 7$

$n_1^{(j=2)}$ $\quad n_2 = 3, 7, 11$

Sei $(\omega^{(n)})_{n\geq 1} \in \Omega$ eine Folge und $\{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$ eine beliebige Nummerierung von $\mathbb{Z}^d$

1. betrachten $(\omega_{i_1}^{(n)})_{n\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_1}^{(n_1, j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert
2. betrachten $(\omega_{\underline{i_2}}^{(\underline{n_1}, j)})_{j\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_2}^{(n_2, j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert
3. ...

Beweis

Sei $(\omega^{(n)})_{n\geq 1} \in \Omega$ eine Folge und $\{i_1, i_2, i_3, ...\}$ eine beliebige Nummerierung von $\mathbb{Z}^d$

1. betrachten $(\omega_{i_1}^{(n)})_{n\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_1}^{(n_1,j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert
2. betrachten $(\omega_{i_2}^{(n_1,j)})_{j\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_2}^{(n_2,j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert
3. ...
4. Definieren $\omega^* \in \Omega$ durch: $\omega_{i_k}^* := \lim_{j\to\infty} \omega_{i_k}^{(n_k,j)}, \quad \forall k \geq 1$

Beweis

Sei $(\omega^{(n)})_{n\geq 1} \in \Omega$ eine Folge und $\{i_1, i_2, i_3, ...\}$ eine beliebige Nummerierung von $\mathbb{Z}^d$

1. betrachten $(\omega_{i_1}^{(n)})_{n\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_1}^{(n_1,j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert
2. betrachten $(\omega_{i_2}^{(n_1,j)})_{j\geq 1} \in \{-1, 1\}$ und finden eine Teilfolge $(\omega_{i_2}^{(n_2,j)})_{j\geq 1}$, die konvergiert
3. ...
4. Definieren $\omega^* \in \Omega$ durch: $\omega_{i_k}^* := \lim_{j\to\infty} \omega_{i_k}^{(n_k,j)}, \quad \forall k \geq 1$
5. Dann ist die diagonale Teilfolge $(\omega^{(n_j,j)})_{j\geq 1}$ eine Teilfolge von $(\omega^{(n)})_{n\geq 1}$

und erfüllt $\omega^{(n_j,j)} \to \omega^*$ für $j \to \infty$

Stetige Funktionen auf Ω

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls aus $\omega^{(n)} \to \omega$ folgt $f(\omega^{(n)}) \to f(\omega)$. Die Menge der stetigen Funktionen schreiben wir als $C(\Omega)$.

Stetige Funktionen auf Ω

Definition (Stetigkeit)

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls aus $\omega^{(n)} \to \omega$ folgt $f(\omega^{(n)}) \to f(\omega)$. Die Menge der stetigen Funktionen schreiben wir als $C(\Omega)$.

- lokale Funktionen sind stetig

Quasilokalität

Definition (quasilokale Funktion)

Eine Funktion f heißt **quasilokal**, falls es eine Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ von lokalen Funktionen gibt sd. $||g_n - f||_\infty \to 0.$

$\Downarrow$

Definition (quasilokale Spezifikation)

Eine Spezifikation $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ ist **quasilokal**, falls jeder Kern π_Λ stetig bezüglich der Randbedingung ist.

$\pi_\Lambda(A\,|\,\cdot) : \Omega \to [0,1]$

Zusammenhang Stetigkeit und Quasilokalität

Lemma 6.21

f ist stetig $\Leftrightarrow$ f quasilokal ist.

Aufgabe 6.13

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ quasilokal. Für ein festes Λ gilt:

$$f \in C(\Omega) \Rightarrow \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$$

Charakterisierung von Maßen

Lemma 6.22

Falls $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mu = \nu$
2. $\mu(C) = \nu(C)$ für alle $C \in \mathscr{C}$.
3. $\mu(g) = \nu(g)$ für alle lokalen Funktionen g.
4. $\mu(f) = \nu(f)$ für alle $f \in C(\Omega)$.

Konvergenz von Maßen

Definition (Konvergenz auf $\mathscr{M}(\Omega)$)

Eine Folgen $(\mu_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{M}(\Omega)$ konvergiert zu $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(C) = \mu(C), \quad \text{für alle Zylinder } C \in \mathscr{C}$$

Wir schreiben $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Äquivalente Konvergenzen

Aufgabe 6.12

1. $\mu_n \Rightarrow \mu$
2. $\mu_n(f) \to \mu(f)$ für alle lokalen Funktionen f.
3. $\mu_n(f) \to \mu(f)$ für alle $f \in C(\Omega)$.
4. $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$, wenn wir für alle $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega)$ den Abstand definieren als

$$\rho(\mu, \nu) := \sup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \max_{C \in \mathscr{C}(B(k))} |\mu(C) - \nu(C)|.$$

Kompaktheit von $\mathscr{M}(\Omega)$

Satz 6.24

$\mathscr{M}(\Omega)$ ist **folgenkompakt**, d.h. für jede Folge $(\mu_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{M}(\Omega)$ gibt es ein $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$ und eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_{k\geq 1}$ s.d. $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$ für $k \to \infty$.

Existenz

Satz 6.26

Falls $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ quasilokal ist, gilt $\mathscr{G}(\pi) \neq \emptyset$.

- es existiert also ein kompatibles Maß

Beweis

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine quasilokale Spezifikation und $\omega \in \Omega$
Definiere $\mu_n(\cdot) := \pi_{B(n)}(\cdot|\omega)$ $\qquad B(n) = \{-n, ..., n\}^d$

Beweis

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine quasilokale Spezifikation und $\omega \in \Omega$
Definiere $\mu_n(\cdot) := \pi_{B(n)}(\cdot|\omega)$ $\qquad B(n) = \{-n, ..., n\}^d$
Aus der Konsistenz von π folgt für n sd. $B(n) \supset \Lambda$:

$$\mu_n \pi_\Lambda = \pi_{B(n)} \pi_\Lambda(\cdot|\omega) = \pi_{B(n)}(\cdot|\omega) = \mu_n \quad (*)$$

Beweis

Sei $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ eine quasilokale Spezifikation und $\omega \in \Omega$
Definiere $\mu_n(\cdot) := \pi_{B(n)}(\cdot|\omega)$ $\qquad B(n) = \{-n, ..., n\}^d$
Aus der Konsistenz von π folgt für n sd. $B(n) \supset \Lambda$:

$$\mu_n \pi_\Lambda = \pi_{B(n)} \pi_\Lambda(\cdot|\omega) = \pi_{B(n)}(\cdot|\omega) = \mu_n \quad (*)$$

Aus der Kompaktheit von $\mathscr{M}(\Omega)$ folgt:

$$\exists \mu \in \mathscr{M}(\Omega),\ (\mu_{n_k})_{k \geq 1}\ sd.\ \mu_{n_k} \Rightarrow \mu \text{ für } k \to \infty$$

Wir zeigen, dass $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ ist.

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \ \ \forall f \in C(\Omega)$

Beweis

$\boxed{\mu \pi_\Lambda = \mu} \quad \forall \Lambda \quad \Leftrightarrow \mu \pi_\Lambda (f) = \mu(f)$

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \;\; \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \;\; \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$
Aus Nr.6.6 wissen wir, $\mu\pi_\Lambda(f) = \mu(\pi_\Lambda f)$

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \ \ \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$
Aus Nr.6.6 wissen wir, $\mu\pi_\Lambda(f) = \mu(\pi_\Lambda f)$

$$\mu\pi_\Lambda(f) \overset{Nr.6.6}{=} \mu(\pi_\Lambda f) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\pi_\Lambda f)$$

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \;\; \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$
Aus Nr.6.6 wissen wir, $\mu\pi_\Lambda(f) = \mu(\pi_\Lambda f)$

$$\mu\pi_\Lambda(f) \overset{Nr.6.6}{=} \mu(\pi_\Lambda f) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\pi_\Lambda f) \overset{Nr.6.6}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}\pi_\Lambda(f)$$

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \ \ \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$
Aus Nr.6.6 wissen wir, $\mu\pi_\Lambda(f) = \mu(\pi_\Lambda f)$

$$\mu\pi_\Lambda(f) \overset{Nr.6.6}{=} \mu(\pi_\Lambda f) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\pi_\Lambda f) \overset{Nr.6.6}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}\pi_\Lambda(f) \overset{*}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(f)$$

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \;\; \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$
Aus Nr.6.6 wissen wir, $\mu\pi_\Lambda(f) = \mu(\pi_\Lambda f)$

$$\mu\pi_\Lambda(f) \overset{Nr.6.6}{=} \mu(\pi_\Lambda f) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\pi_\Lambda f) \overset{Nr.6.6}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}\pi_\Lambda(f) \overset{*}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(f) = \mu(f)$$

Beweis

Wir erinnern uns (Lemma 6.22) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu(f) = \nu(f) \;\; \forall f \in C(\Omega)$

Sei $f \in C(\Omega)$ und $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$, da π quasilokal $\overset{\text{Nr.6.13}}{\Longrightarrow} \pi_\Lambda f \in C(\Omega)$
Aus Nr.6.6 wissen wir, $\mu\pi_\Lambda(f) = \mu(\pi_\Lambda f)$

$$\mu\pi_\Lambda(f) \overset{Nr.6.6}{=} \mu(\pi_\Lambda f) = \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(\pi_\Lambda f) \overset{Nr.6.6}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}\pi_\Lambda(f) \overset{*}{=} \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(f) = \mu(f)$$

Da f und Λ beliebig gilt $\mu\pi_\Lambda = \mu$ also $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!
Welche Fragen gibt es?