Handout Models with Continuous Symmetry

Philipp Ligtenberg

15. Juli 2021

Grundlegende Definitionen

Definition 1 (Single-Spin Raum)
Wir betrachten Modelle, für die die Spins N-dimensionale Einheitsvektoren sind, in den Knoten von $\mathbb{Z}^d$. Sei $N \in \mathbb{N}$, dann ist der **Single-Spin Raum**:

$$\Omega_0 := \{\nu \in \mathbb{R}^N : \ \|\nu\|_2 = 1\} \equiv \mathbb{S}^{N-1}.$$

Definition 2 (Konfiguration)
Entsprechend ist die Menge an **Konfiguration** auf einer endliche Teilmenge $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ gegeben als:

$$\Omega_\Lambda := \Omega_0^\Lambda$$

und wir assoziieren zu jedem Knoten $i \in Z^d$ eine Zufallsvariable $\mathbf{S}_i = \left(S_i^1, S_i^2, \ldots, S_i^N\right)$ definiert durch:

$$\mathbf{S}_i(\omega) := \omega_i$$

und wird **Spin** bei i genannt.

Definition 3 (Hamiltonian)
Sei $W : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Der **Hamiltonian eines O(N)-symmetrischen Models** in $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ist definiert als:

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta} := \beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} W\left(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j\right).$$

Definition 4 (Gibbs-Verteilung)
Sei $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und $\eta \in \Omega$. Die **Gibbs Verteilung** in Λ mit Randbedinung η ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_{\Lambda,\beta}^\eta$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert durch:

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mu_{\Lambda,\beta}^\eta(A) := \int_{\Omega_\Lambda} \frac{e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})}}{\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta}^\eta} \mathbb{1}_A(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c}) \prod_{i \in \Lambda} \mathrm{d}\omega_i\,,$$

wobei mit $\mathrm{d}\omega_i$ das Lebesgue Maß aus $\mathbb{S}^{N-1}$ bezeichnet wird. Außerdem ist wie gehabt die Partitionsfunktion gegeben durch

$$\mathbf{Z}_{\Lambda,\beta}^\eta := \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})} \prod_{i \in \Lambda} \mathrm{d}\omega_i\,.$$

Definition 5 (Rotationen)
Sei $R \in SO(N)$.

(i) Wir definieren eine **globale Rotation** r auf einer Konfiguration $\omega \in \Omega$ durch:

$$(r\omega)_i := R\omega_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

(ii) Analog defineren wir Rotationen auf Ereignissen $A \in \mathcal{F}$ durch

$$rA := \{r\omega \colon \omega \in A\}$$

als auch auf Funktionen und Wahrscheinlichkeitsmaßen durch

$$rf(\omega) := f(r^{-1}\omega), \quad r(\mu)(A) := \mu(r^{-1}A).$$

Wir schreiben $r \in SO(N)$ und meinen, dass r eine globale Rotation assoziiert mit einem Element von $SO(N)$ ist.

Mermin - Wagner Theorem

Theorem 6 (Mermin-Wagner Theorem)
Sei $N \geq 2$ und W zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für $d = 1, 2$, dass alle unendlich-volumen Gibbs Maße invariant unter $SO(N)$ sind.

$$\forall \mu \in \mathcal{G}(N): \quad r(\mu) = \mu, \quad \forall r \in SO(N).$$

Notation 7
Für $N = 2$ notieren wir:

1. Eine Konfiguration durch eine Familie $(\vartheta_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$ von Winkeln: $\vartheta_i \in (-\pi, \pi]$, derart, dass gilt:

$$\mathbf{S}_i = (\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i)$$

2. Außerdem: $V(\theta) = W(\cos \theta)$, sodass:

$$\mathcal{H}_{B(n);\beta} = \beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} W\left(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j\right) = \beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} V\left(\vartheta_i - \vartheta_j\right).$$

Definition 8
Definieren die Konfiguration $\omega_i^{\mathrm{SW}} = \left(\cos \vartheta_i^{\mathrm{SW}}, \sin {\vartheta_i}^{\mathrm{SW}}\right)$ durch:

$$\vartheta_i^{\mathrm{SW}} := \left(1 - \frac{\log\left(1 + \|i\|_\infty\right)}{\log\left(1 + n\right)}\right)\pi, \qquad i \in B(n).$$

Proposition 9
Sei $d = 1, 2$ und $N = 2$. Unter den Voraussetzungen des Mermin-Wagner Theorems gilt: Es existieren Konstanten c_1, c_2, sodass für eine beliebige Randbedingung $\eta \in \Omega$, beliebige inverse Temperatur $\beta < \infty$, bliebigen Winkel $\Psi \in (-\pi, \pi]$ und beliebiges $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt:

$$\left| \langle f \rangle_{B(n);\beta}^{\eta} - \langle r_\psi f \rangle_{B(n);\beta}^{\eta} \right| \leq \beta^{1/2} |\Psi| \, \|f\|_\infty \times \begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{n-l}}, & d = 1 \\ \frac{c_2 \sqrt{l}}{\sqrt{\log\left(n-l\right)}}, & d = 2 \end{cases}$$

für alle $n > l$ und beschränkte Funktionen f mit supp(f)$\subset B(l)$.

Notation 10
Mit $\langle\cdot\rangle_{\Lambda;\beta}^{\eta;\Psi}$ notieren wir den Erwartungswert unter dem Maß:

$$\mu_{\Lambda;\beta}^{\eta;\Psi}(A) = \left(Z_{\Lambda;\beta}^{\eta;\Psi}\right)^{-1} \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta}(t_\Psi(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}))} \mathbb{1}_A(\omega_\Lambda\eta_{\Lambda^c}) \prod_{i\in\Lambda} \mathrm{d}\omega_i$$

für $A \in \mathcal{F}$.

Definition 11 (relative Entropie)
Wir definieren die **relative Entropie** zweier Maße μ, ν als:

$$h(\mu|\nu) = \begin{cases} \left\langle \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \log\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)\right\rangle_\nu, & \text{falls}\, \mu \ll \nu^1 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei mit $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ die Radon-Nykodym Ableitung von μ bzgl. ν bezeichnet wird.

Lemma 12 (Pinkers Ungleichung)
Für jede Messbare Funktion f mit $\|f\|_\infty \leq 1$ gilt:

$$\left|\langle f\rangle_\mu - \langle f\rangle_\nu\right| \leq \sqrt{2h(\mu|\nu)}.$$

Notation 13
Wir schreiben

$$(\nabla\Psi)_{ij} := \Psi_j - \Psi_i.$$

Definition 14 (Dirichlet Energie)
Die **Dirichlet Energie** einer Funktion $\Psi\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathcal{E}(\Psi) := \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_{\Lambda\setminus B(l)}} (\nabla\Psi)_{ij}^2 .$$

Lemma 15
Die Dirichlet Energie hat einen eindeutigen Minimierer unter allen Funktionen $U\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, welcher $U_i = 0, \forall i \notin \Lambda$ und $U_i = 1 \forall i \in B(l)$ erfüllt. Dieser ist gegeben durch:

$$u_i^* := \mathbb{P}_i\left(X \text{ kommt nach } B(l) \text{ bevor er } \Lambda \text{ verlässt}\right),$$

mit $X = (X_k)_{k\geq 0}$ dem symmetrischen random-walk auf $\mathbb{Z}^d$ und $\mathbb{P}_i(X_0 = i) = 1$. Es gilt:

$$\mathcal{E}(u^*) = d \sum_{\partial^{\text{int}} B(l)} \mathbb{P}_j\left(X \text{ verlässt } \Lambda \text{bevor er nach } B(l) \text{ zurückkehrt}\right).$$

Abfall der Korrelation

Theorem 16
Für jedes $d \geq 1$, $N \geq 1$, $\beta \geq 0$ und jedes Gibbs Maß μ des $O(N)$ Modells bei inverser Temperatur β auf $\mathbb{Z}^d$ gilt:

$$\left|\langle \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_i\rangle_\mu\right| \leq N \langle\sigma_0\sigma_i\rangle_{\beta,0}^{+,\text{Ising}}$$

wobei der Erwartungswert auf der rechten Seite bzg. des Gibbs Maß $\mu_{\beta,0}^+$ des Ising Modells auf $\mathbb{Z}^d$ bei inverser Temperatur β und $h = 0$ ist.

Korollar 16.1
Sei μ das eindeutige Gibbs Maß des $O(N)$ Modells auf $\mathbb{Z}$. Dann gilt für jede inverse Temperatur $0 \leq \beta < \infty$:

$$\left| \langle \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_i \rangle_\mu \right| \leq N \left(\tanh \beta \right)^{|i|}.$$

Theorem 17
Sei μ ein infinite-volume Gibbs Maß assoziiert mit dme zwei dimensionalen XY Modell bei inverser Temperatur β. $\forall \epsilon > 0 : \exists \beta_0(\epsilon) < \infty$ sodass $\forall \beta > \beta_0(\epsilon)$ und $i \neq j \in \mathbb{Z}^2$ gilt:

$$\left| \langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle_\mu \right| \leq \|j - i\|_2^{-(1-\epsilon)/(2\pi\beta)}.$$

Grundlage des Vortrags: S.Friedli und Y.Velenik(2017): Models with Continuous Symmetry. In: S.Friedli und Y.Velenik: StatisticalMechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction. (CambridgeUniversityPress) Cambridge. S. 411 - 435