Infinite-Volume Gibbs Measures II

Ben Breitinger (ben.breitinger[at]uni-bonn.de) 17.06.2021

Zusammenfassung

Nachdem wir für quasilokale Spezifikationen die Existenz von Gibbs-Maßen gezeigt haben, wollen wir uns der Frage widmen, wann auch Eindeutigkeit gilt. Wir werden in diesem Zuge Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit beweisen. Da die auftretenden Schranken in Anwendungen nur meist schwer abschätzbar sind, stellen wir ein zentrales Resultat bereit, welches die Verbindung zu Gibbs-Spezifikationen schafft. Als konkrete Anwendung werden wir das Ising-Modell mit weiten Wechselwirkungen betrachten und zeigen, dass wir die Eindeutigkeit des Gibbs-Maßes erhalten, wenn die gegenseitigen Wechselwirkungen schnell genug abfallen.

Abschließend wollen wir uns der Frage widmen, wie sich Symmetrien einer Spezifikation auf $\mathscr{G}(\pi)$ fortpflanzt.

Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit

Definition. Definiere für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die *Oszillation* in $i \in \mathbb{Z}^d$ von f durch

$$\delta_i(f) := \sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega \\ \omega_k=\eta_k \forall k\neq i}} |f(\omega) - f(\eta)|$$

Lemma (Dusting-Lemma)**.** *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $i, j \in \mathbb{Z}^d$. Dann gilt mit $c_{ji}(\pi) := \sup_{\substack{\omega,\omega'\in\Omega \\ \omega_k=\eta_k \forall k\neq i}} \|\pi_j(\cdot \mid \omega) - \pi_j(\cdot \mid \omega')\|_{TV}$, dass $\delta_i(\pi_i f) = 0$ und*

$$\delta_i(\pi_j f) \leq \delta_i(f) + c_{ji}(\pi)\delta_j(f), \qquad \text{für } i \neq j.$$

Lemma. *Sei $f \in C(\Omega)$. Dann gilt*

$$\max f - \min f \leq \Delta(f)$$

mit $\Delta(f) := \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \delta_i(f)$. Insbesondere gilt für $\mu, \nu \in \mathscr{M}_1(\Omega)$

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq \Delta(f)$$

Lemma. *Sei $f \in C_{\mathscr{O}}(\Omega)$, $\mu, \nu \in \mathscr{G}(\pi)$ und π eine quasilokale Spezifikation. Gibt es ein $\alpha \leq 1$, sodass*

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq \alpha\Delta(f),$$

und ist $c(\pi) := \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_{ji}(\pi) < 1$ dann gilt schon

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq c(\pi)\alpha\Delta(f).$$

Seminar „Statistische Mechanik von Gittersystemen“, SoSe 2021, Universität Bonn

Theorem (Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit)**.** *Sei π eine quasilokale Spezifikation, die*

$$c(\pi) < 1$$

erfüllt. Dann ist das durch π spezifizierte Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig, also $|\mathscr{G}(\pi)| = 1$.

Anwendungen

Theorem. *Sei $\Phi = \{\Phi_B\}_{B \Subset \mathbb{Z}^d}$ ein absolut summierbares Potenzial und gelte*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \neq i} \sum_{B \supset \{i,j\}} \delta(\Phi_B) < 1,$$

mit $\delta(\Phi_B) := \sup_{\omega,\omega'} |\Phi_B(\omega) - \Phi_B(\omega')|$. Dann ist die Dobrushins Kriterium der schwachen Abhängigkeit erfüllt, wonach es folglich nur ein Gibbs-Maß gibt, welches durch π^Φ spezifiziert wird.

Symmetrien

Definition. Eine *Transformation* ist eine Familie von Abbildungen $(\tau_g)_{g \in \mathsf{G}}$ für eine Gruppe $(\mathsf{G}, \cdot)$, die die folgenden Bedingungen

- $(\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2})(\omega) = \tau_{g_1 \cdot g_2}(\omega)$ für alle $g_1, g_2 \in \mathsf{G}$, $\omega \in \Omega$ und
- $\tau_{\mathrm{id}}(\omega) = \omega$ für alle $\omega \in \Omega$, wobei $\mathrm{id} \in \mathsf{G}$ die Identität bezeichnet,

erfüllt. Außerdem definieren wir die Wirkung der Gruppe G auch auf Funktionen und Maße

$$\tau_g f(\omega) := f(\tau_g^{-1}\omega), \qquad \tau_g \mu(A) := \mu(\tau_g^{-1} A)$$

Wir schreiben $\tau_g \pi := \{\tau_g \pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$.

Definition. Eine *interne Transformation* ist eine Transformation einer Gruppe G, die auf Ω^0 operiert. Wir erweitern die Aktion von G auf ganz Ω, indem wir

$$(\tau_g \omega)_i := \tau_g \omega_i$$

für alle $i \in \mathbb{Z}^d$ schreiben. Weiterhin schreiben wir

$$(\tau_g \pi)_\Lambda(A \mid \omega) := \pi_\Lambda(\tau_g^{-1} A \mid \tau_g^{-1}\omega).$$

Eine *räumliche Transformation* ist gegeben durch eine Gruppe G, die auf $\mathbb{Z}^d$ operiert. Wir setzen die Operation ebenso auf Ω und π_Λ aus:

$$(\tau_g \omega)_i := \omega_{\tau_g^{-1} i}, \qquad (\tau_g \pi)_\Lambda(A \mid \omega) := \pi_{\tau_g^{-1}\Lambda}(\tau_g^{-1} A \mid \tau_g^{-1}\omega)$$

Definition. Eine Spezifikation π heißt G-invariant, falls für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ und $g \in \mathsf{G}$ die Identität $(\tau_g \pi)_\Lambda = \pi_\Lambda$ gilt.

Theorem. *Sei* G *eine interne Transformation und* π *eine* G*-invariante Spezifikation. Dann ist* $\mathscr{G}(\pi)$ *abgeschlossen unter der Wirkung von* G*: Ist* $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$*, so folgt* $\tau_g \mu \in \mathscr{G}(\pi)$ *für alle* $g \in \mathsf{G}$*.*

Korollar. *Falls* $\mathscr{G}(\pi) = \{\mu\}$ *und* π *eine* G*-invariante Spezifikation ist, so ist auch* μ G*-invariant.*

Definition. Sei π eine G-invariante Spezifikation. Falls es ein $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ gibt, sodass $\tau_g \mu \neq \mu$, so sagen wir, dass die von G beschriebe Symmetrie *spontan gebrochen* wird unter μ.

Literatur

[1] Sacha Friedli and Yvan Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction.* Cambridge University Press, 2017.

[2] Hans-Otto Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions.* De Gruyter, 2011.